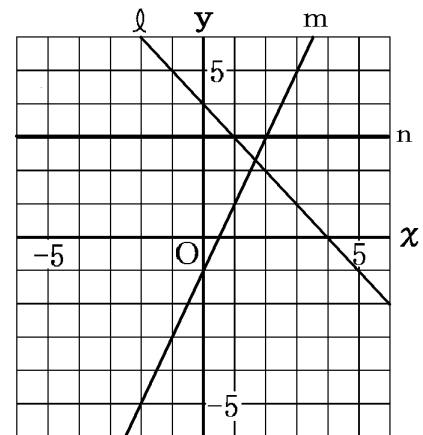


第 10 章	数学(2 年)	名前:	日 付	No.03
	一次関数 4			

[問題 1]

次の図について、問いに答えなさい。

- (1) 直線 l の切片を求めなさい。
- (2) 直線 m の変化の割合を求めなさい。
- (3) 直線 n の式を求めなさい。
- (4) 2 直線 l , m の交点の座標を求めなさい。



[解答欄]

(1) 4	(2) 2	(3) $y = 3$
(4) $\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$		

[解説]

$y = ax + b$ で a は傾き, b は切片(直線が y 軸と交わる点の y 座標)を表す。

(1) 直線 l が y 軸と交わる点の座標は, 図より $(0, 4)$ ゆえに直線 l の切片は 4

(2) グラフから, x が +1 増加するとき, y は +2 増加することが読み取れる。

ゆえに, (変化の割合) = $\frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{2}{1} = 2$

(3) x 軸に平行で直線上の点の y 座標はすべて 3 なので, $y = 3$

(4) 2 直線 l , m の交点の座標は l , m の 2 つの式を連立方程式として解いて求める。

まず, 直線 l の式を求める。グラフから x が +1 増加するとき, y は 1 減少(-1 増加)することが読み取れる。

ゆえに, (傾き) = (変化の割合) = $\frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{-1}{1} = -1$

l の切片は(1)より 4 である。よって l の式は $y = -x + 4 \cdots \textcircled{1}$

次に直線 m の式を求める。(2)より(変化の割合) = 2 なので, (傾き) = 2 また, グラフより切片は -1

よって直線 m の式は $y = 2x - 1 \cdots \textcircled{2}$

①, ②を連立方程式として解く。

②の y を①の y に代入すると, $2x - 1 = -x + 4$, $3x = 5$, $x = \frac{5}{3}$

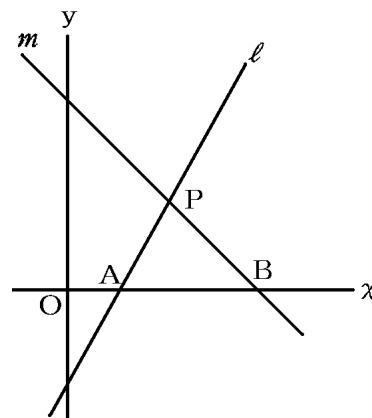
$x = \frac{5}{3}$ を①に代入すると, $y = -\frac{5}{3} + 4 = \frac{7}{3}$

よって, 連立方程式の解は $x = \frac{5}{3}$, $y = \frac{7}{3}$ ゆえに, 交点の座標は $\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$

[問題 2]

右の図で、直線 l , m はそれぞれ、 $-2x + y = -4$, $x + y = 8$ のグラフである。このとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) 交点 P の座標を求めよ。
- (2) $\triangle PAB$ の面積を求めよ。



[解答欄]

(1) (4, 4)	(2) 12
------------	--------

[解説]

(1) 2 直線の交点は、2 直線の式を連立方程式として解いて求める。

$$\begin{cases} -2x + y = -4 \cdots \textcircled{1} \\ x + y = 8 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①-②より、 $-3x = -12$, $x = 4$

$x = 4$ を②に代入すると、 $4 + y = 8$, $y = 4$

連立方程式の解が $x = 4$, $y = 4$ なので、交点の座標は (4, 4)

(2) まず、点 A, B の x 座標を求める。

x 軸との交点の y 座標は 0 なので、

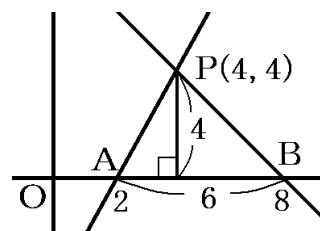
$-2x + y = -4$ に $y = 0$ を代入すると、 $-2x + 0 = -4$, $x = 2$

よって、点 A の x 座標は 2

$x + y = 8$ に $y = 0$ を代入すると、 $x + 0 = 8$, $x = 8$ よって、点 B の x 座標は 8

$\triangle PAB$ で底辺を AB とすると、(底辺)= $AB = 8 - 2 = 6$ 点 P の y 座標が 4 なので、

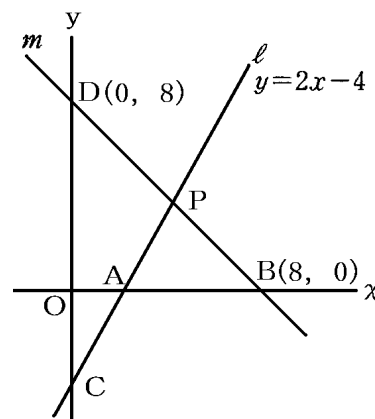
(高さ)=4 ゆえに、($\triangle PAB$ の面積)= $\frac{1}{2} \times (\text{底辺}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$



[問題 3]

右の図で、直線 l の式は $y = 2x - 4$ で、直線 m は 2 点 B(8, 0), D(0, 8) を通ります。次の問いに答えなさい。

- (1) 点 A の座標を求めなさい。
- (2) 直線 m の式を求めなさい。
- (3) 点 P の座標を求めなさい。
- (4) $\triangle PAB$ の面積を求めなさい。
- (5) 四角形 PAOD の面積を求めなさい。



[解答欄]

(1) (2, 0)	(2) $y = -x + 8$	(3) (4, 4)
(4) 12	(5) 20	

[解説]

(1) x 軸との交点の y 座標は 0 なので, $y = 2x - 4$ に $y = 0$ を代入して,

$$0 = 2x - 4, 2x = 4, x = 2 \quad \text{よって点 A の座標は}(2, 0)$$

(2) 図より直線 m の切片は 8 なので, 直線 m の式を $y = ax + 8$ とおくことができる。

直線 m は $B(8, 0)$ を通るので, $x = 8, y = 0$ を $y = ax + 8$ に代入して,

$$0 = a \times 8 + 8, 8a = -8, a = -1$$

よって直線 m の式は $y = -x + 8$

(3) 2 直線の交点は, 2 直線の式を連立方程式として解いて求める。

$$\begin{cases} y = 2x - 4 \cdots \textcircled{1} \\ y = -x + 8 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①の y を②の y に代入すると, $2x - 4 = -x + 8, 3x = 12, x = 4$

$x = 4$ を②に代入すると, $y = -4 + 8 = 4$

よって点 P の座標は $(4, 4)$

(4) $\triangle PAB$ で底辺を AB とすると,

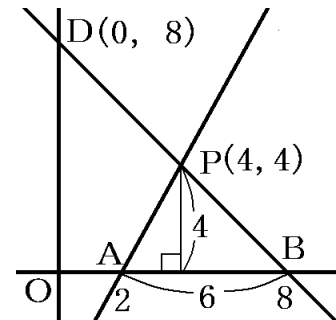
$$(\text{底辺}) = AB = 8 - 2 = 6$$

点 P の y 座標が 4 なので, $(\text{高さ}) = 4$

$$\text{ゆえに, } (\triangle PAB \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$$

$$(5) (\triangle OBD \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times OB \times OD = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32$$

$$(\text{四角形 PAOD の面積}) = (\triangle OBD \text{ の面積}) - (\triangle PAB \text{ の面積}) = 32 - 12 = 20$$



[問題 4]

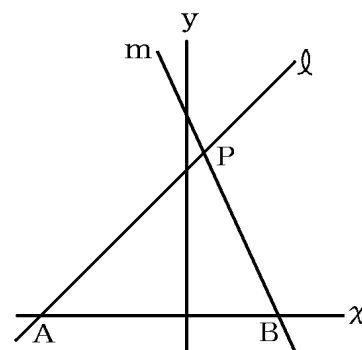
右の図で、直線 l の式は $y = x + 8$ で、直線 m の式は $y = -3x + 12$ である。直線 l 、 m と x 軸との交点をそれぞれ A 、 B とする。また、直線 l と m との交点を P とする。次の問いに答えなさい。

(1) 点 P の座標を求めなさい。

(2) 点 P と、線分 AB の中点を通る直線の式を求めなさい。

[解答欄]

(1) (1, 9)	(2) $y = 3x + 6$
------------	------------------



[解説]

(1) 2 直線の交点は、2 直線の式を連立方程式として解いて求める。

$$\begin{cases} y = x + 8 & \cdots \textcircled{1} \\ y = -3x + 12 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①の y を②の y に代入すると、 $x + 8 = -3x + 12$, $4x = 4$, $x = 1$

$x = 1$ を①に代入すると、 $y = 1 + 8 = 9$

よって、点 P の座標は(1, 9)

(2) *2 点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) の中点の座標は、 $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

$y = x + 8$ に $y = 0$ を代入すると $x = -8$ なので、点 A の座標は(-8, 0)

同様に点 B の座標は(4, 0) したがって AB の中点の座標は $\left(\frac{-8 + 4}{2}, 0\right) = (-2, 0)$

求める直線の式を $y = ax + b$ とおく。

点 $P(1, 9)$ を通るので、 $x = 1$, $y = 9$ を代入して、 $9 = a \times 1 + b$, $a + b = 9 \cdots \textcircled{1}$

$(-2, 0)$ を通るので $x = -2$, $y = 0$ を代入して $0 = a \times (-2) + b$, $-2a + b = 0 \cdots \textcircled{2}$

①, ②を連立方程式として解く。①-②より $3a = 9$, $a = 3$

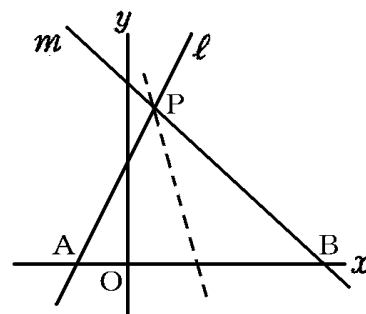
$a = 3$ を①に代入して、 $3 + b = 9$, $b = 6$

よって、求める直線の式は $y = 3x + 6$

[問題 5]

直線 $l: y = 2x + 4$, 傾き -1 の直線 m が図のように
点 $P(2, 8)$ で交わっている。次の問いに答えなさい。

- (1) 直線 m の式を求めなさい。
- (2) $\triangle ABP$ の面積を求めなさい。
- (3) 点 P を通り, $\triangle ABP$ の面積を 2 等分する直線の式を求めなさい。



[解答欄]

(1) $y = -x + 10$	(2) 48	(3) $y = -4x + 16$
-------------------	--------	--------------------

[解説](1) 傾きが -1 なので m の式は $y = -x + b$ とおくことができる。 $P(2, 8)$ を通るので, $x = 2, y = 8$ を $y = -x + b$ に代入して, $8 = -2 + b$, $b = 10$

よって, 直線 m の式は $y = -x + 10$ となる。

- (2) $y = 2x + 4$ に $y = 0$ を代入すると,
 $0 = 2x + 4$ で $x = -2$ 。よって点 A の x 座標は -2
 同様に点 B の x 座標は 10 。よって $AB = 10 - (-2) = 12$
 底辺を AB とすると, 高さは点 P の y 座標で 8

$$\text{従って } \triangle ABP \text{ の面積} = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48$$

- (3) 線分 AB の中点を M とする。

$\triangle PAM$ と $\triangle PBM$ で, それぞれの底辺を AM , BM とすると,
 $AM = BM$ で底辺の長さは等しい。高さは図の PH で共通。
 ゆえに $\triangle PAM$ と $\triangle PBM$ の面積は等しくなる。

$$AB \text{ の中点 } M \text{ の } x \text{ 座標は, } \frac{-2 + 10}{2} = 4$$

面積を二等分する直線はこの中点 M と点 P を通る。

この直線を $y = ax + c$ とおく。

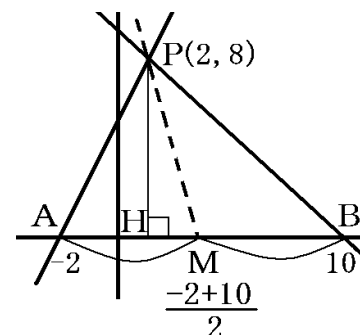
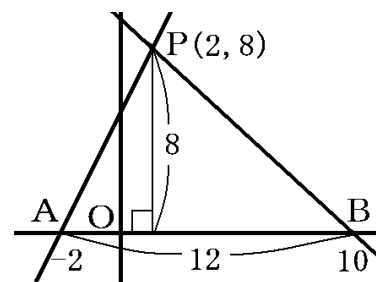
$$\text{点 } P(2, 8) \text{ を通るので, } x = 2, y = 8 \text{ を代入して, } 8 = a \times 2 + c, 2a + c = 8 \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{点 } M(4, 0) \text{ を通るので, } x = 4, y = 0 \text{ を代入して, } 0 = a \times 4 + c, 4a + c = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を連立方程式として解く。} \textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より, } -2a = 8, a = -4$$

$$a = -4 \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入して, } 2 \times (-4) + c = 8, -8 + c = 8, c = 16$$

よって面積を二等分する直線の式は, $y = -4x + 16$



[問題 6]

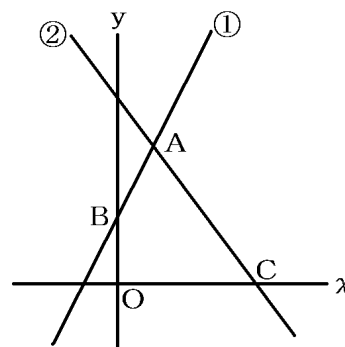
右の図のように、1 次関数

$$y = 2x + 3 \cdots \textcircled{1}$$

$$y = -x + 6 \cdots \textcircled{2}$$

のグラフがある。①、②のグラフの交点を A、①のグラフと y 軸との交点を B、②のグラフと x 軸との交点を C とするとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 点 B、C の座標をそれぞれ求めなさい。
- (2) 点 A の座標を求めなさい。
- (3) y 軸上に点 P をとって、 $\triangle ABC$ と面積が等しくなるように $\triangle ABP$ をつくりたい。このとき、点 P の y 座標の値 p を求めなさい。(ただし、 $p < 3$ である。)



[解答欄]

(1) B(0, 3), C(6, 0)	(2) (1, 5)	(3) $p = -12$
----------------------	------------	---------------

[解説]

(1) 点 B の座標を求めるために、①の $y = 2x + 3$ に $x = 0$ を代入すると、 $y = 3$ によって、点 B の座標は (0, 3) になる。

次に、点 C の座標を求めるために、②の $y = -x + 6$ に $y = 0$ を代入すると、 $0 = -x + 6$, $x = 6$ によって、点 C の座標は (6, 0) になる。

(2) 2 直線の交点を求めるために、2 直線の式 $y = 2x + 3 \cdots \textcircled{1}$ と $y = -x + 6 \cdots \textcircled{2}$ を連立方程式として解く。

①の y を②に代入すると、

$$2x + 3 = -x + 6, 2x + x = 6 - 3, 3x = 3, x = 1$$

$x = 1$ を①に代入すると、 $y = 2 \times 1 + 3 = 5$ によって、交点 A の座標は

(1, 5)

(3) 点 C を通り AB に平行な直線をひくと、この直線と y 軸が交わる点が点 P である。

このとき、 $\triangle ABC$ と $\triangle ABP$ は底辺 AB を共有する。

$\triangle ABC$ の高さ CQ と $\triangle ABP$ の高さ PR は、 $AB \parallel CP$ なので等しくなる。

よって、 $\triangle ABC$ と $\triangle ABP$ の面積は等しくなる。

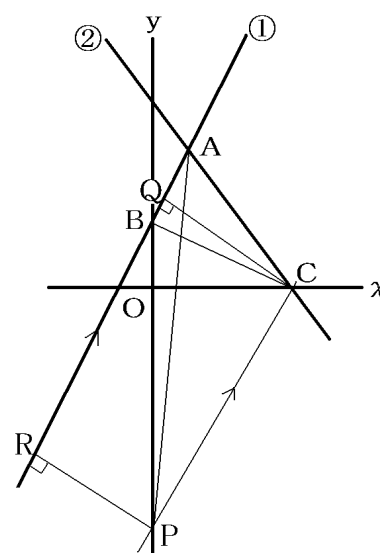
点 C を通って①と平行な直線の傾きは①の傾きと等しくなるので、

式は、 $y = 2x + b$ と表すことができる。

これに $C(6, 0)$ を代入して、

$0 = 12 + b$ で $b = -12$ したがって、③が y 軸と交わる点 P の座標は (0, -12)

よって、 $p = -12$



[問題 7]

座標平面上に直線 $y = x$ と、2 点 $A(5, 4)$, $B(7, 10)$ が与えられている。

また、点 Q はこの直線上を動くものとする。

$AQ + BQ$ が最小になるときの点 Q の座標を求めよ。

[解答欄]

$\left(\frac{11}{2}, \frac{11}{2}\right)$

[解説]

$AQ + BQ$ が最小になるのは A, Q, B が 1 直線上に並ぶときで、 Q が右図の Q' の位置にくるときである。

その理由を右図を使って簡単に説明しておくと、

三角形の 2 辺の和は他の 1 辺よりも長いので、

$$AB < AQ + BQ, \quad AB = AQ' + BQ'$$

$$\text{ゆえに, } AQ' + BQ' < AQ + BQ$$

これは、 Q' の位置にあるとき、それ以外にあるときよりも $AQ + BQ$ が小さくなることを表している。よって、 $AQ + BQ$ が最小になるのは A, Q, B が 1 直線上に並ぶときである。

そこで、まず直線 AB をもとめる。直線 AB を $y = ax + b$ とおく。

$$A(5, 4) \text{ を通るので } x = 5, y = 4 \text{ を代入して, } 4 = a \times 5 + b, 5a + b = 4 \cdots \textcircled{1}$$

$$B(7, 10) \text{ を通るので } x = 7, y = 10 \text{ を代入して, } 10 = a \times 7 + b, 7a + b = 10 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を連立方程式として解く。}\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ より, } 2a = 6, a = 3$$

$$a = 3 \text{ を}\textcircled{1} \text{ に代入すると, } 5 \times 3 + b = 4, 15 + b = 4, b = -11$$

$$\text{ゆえに, 直線 } AB \text{ の式は } y = 3x - 11$$

$$\text{次に, 直線 } AB \text{ } y = 3x - 11 \cdots \textcircled{3} \text{ と直線 } y = x \cdots \textcircled{4} \text{ の交点を求める。}$$

2 直線の交点は、2 直線の式を連立方程式として解いて求める。

$\textcircled{4}$ の y を $\textcircled{3}$ の y に代入すると、

$$x = 3x - 11, -2x = -11, x = \frac{11}{2}$$

$$x = \frac{11}{2} \text{ を}\textcircled{4} \text{ に代入すると, } y = \frac{11}{2}$$

$$\text{よって点 } Q \text{ の座標は } \left(\frac{11}{2}, \frac{11}{2}\right)$$

