

第 5 章	数学(2 年)	名前:	日 付	No.03
	連立方程式の応用 2			

[問題 1]

1 周 400m のトラックを、T さんと K さんの 2 人が走るようになった。まともに走ったのではまったく勝負にならないと薄々感じていた K さんは、「逆方向に走ろうぜ」と提案し、反対方向にトラックを回ったら、初めて出会うまで 40 秒かかった。しかし、このレースに不満をもった T さんが「ちゃんと走ろうよ」と怒り出したため、今度は同じ方向に回ったら、2 分 40 秒後に T さんは 1 周多く回って、K さんを追い越した。T さん、K さんそれぞれの速さ(m/分)を求めなさい。

[解答欄]

T さんの秒速を x m/秒, K さんの秒速を y m/秒とすると。

逆方向に走ると, 2 人で 1 秒間に $x+y$ m 進む。出会うまで 40 秒かかっているので,

$$(x+y) \times 40 = 400 \cdots \textcircled{1}$$

また, 同じ方向に走ると, 1 秒で $x-y$ m 差がつく。1 周 400m の差がつくのが 2 分 40 秒(160 秒)後なので, $(x-y) \times 160 = 400 \cdots \textcircled{2}$

①, ②の連立方程式を解くと, $x = \frac{25}{4}$, $y = \frac{15}{4}$ これは問題にあてはまる。

分速に直すと,

T さんは $\frac{25}{4} \times 60 = 375$ m/分, K さんは $\frac{15}{4} \times 60 = 225$ m/分となる。…答

[問題 2]

ある列車が, 1260m の鉄橋を渡りはじめてから渡り終わるまでに 60 秒かかった。また, この列車が 2010m のトンネルに入りはじめてから出てしまうまでに 90 秒かかった。この列車の長さ与时速を求めなさい。

[解答欄]

この列車の長さを x m, 速さを y m/秒 とする。

1260m の鉄橋を渡りはじめてから渡り終わるまでに $x+1260$ m 進んでいるので,
 $y \times 60 = x + 1260 \cdots \textcircled{1}$

また, 2010m のトンネルに入りはじめてから出てしまうまでに $x+2010$ m 進んでいるので, $y \times 90 = x + 2010 \cdots \textcircled{2}$

①, ②の連立方程式を代入法で解く(加減法でも可)。

$$\textcircled{1} \text{より, } x = 60y - 1260 \cdots \textcircled{1}'$$

①'を②へ代入すると,

$$90y = 60y - 1260 + 2010, 30y = 750, y = 25$$

$$y = 25 \text{を}\textcircled{1}'\text{へ代入すると, } x = 60 \times 25 - 1260 = 240$$

ゆえに, $x = 240, y = 25$

これは問題にあてはまる。

秒速 25m=時速 90km

よって, この列車の長さは 240m, 時速は 90km/時である。…答

[解説]

- まず求めるものを x, y とおく。

「この列車の長さ与时速を求めなさい。」とあるので、列車の長さを $x \text{ m}$ とおく。この問題では、長さの単位は m 、時間の単位は秒が使われているので速さは時速ではなく、秒速を使う。列車の速さを $y \text{ m/秒}$ とする。

- 速さの問題では、 $(\text{時間}) = (\text{距離}) \div (\text{速さ}) = \frac{\text{距離}}{\text{速さ}}$ の公式を使うことが多いが、

この問題では、 $(\text{距離}) = (\text{速さ}) \times (\text{時間})$ を使う。

- まず鉄橋について

「1260m の鉄橋を渡りはじめてから渡り終わるまでに 60 秒かった。」

右図から、この間に列車が進んだ距離は次の 2 通りで表すことができる。

$$(\text{距離}) = 1260 + x$$

$$(\text{距離}) = y \times 60$$

この 2 つの距離は等しいので、 $y \times 60 = 1260 + x \cdots \textcircled{1}$

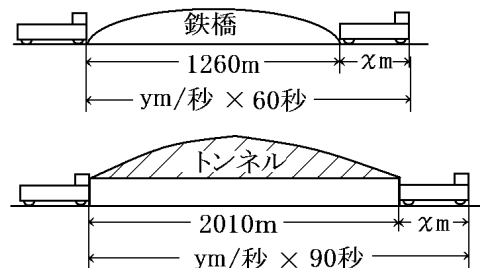
- 次にトンネルについて

「2010m のトンネルに入りはじめてから出てしまうまでに 90 秒かった。」

鉄橋の場合と同様に、 $y \times 90 = 2010 + x \cdots \textcircled{2}$

- ①、②を連立方程式として解く。

最後に計算の結果求めた x, y の値を一応、吟味する。通常は、「これは問題にあてはまる。」と書いておけばよい。



[問題 3]

連立方程式 $\begin{cases} ax + by = 11 \\ bx - ay = -2 \end{cases}$ の解が $x = 3, y = -4$ になるという。 a, b の値を求めなさい。

[解答欄]

$\begin{cases} ax + by = 11 \\ bx - ay = -2 \end{cases}$ に $x = 3, y = -4$ を代入すると、 $\begin{cases} 3a - 4b = 11 \\ 3b + 4a = -2 \end{cases}$ これを a, b の連立方程式として解く。

$$\begin{cases} 3a - 4b = 11 \cdots \textcircled{1} \\ 4a + 3b = -2 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

加減法で解く(代入法は不適當)。 b の係数を 12 にそろえるために $\textcircled{1} \times 3, \textcircled{2} \times 4$

$$\begin{cases} 9a - 12b = 33 \cdots \textcircled{1}' \\ 16a + 12b = -8 \cdots \textcircled{2}' \end{cases}$$

b を消去するために $\textcircled{1}' + \textcircled{2}'$

$$\begin{array}{rcl}
 9a - 12b & = & 33 \\
 +) 16a + 12b & = & -8 \\
 \hline
 25a & = & 25 \\
 a = 1 \text{ を②に代入すると, } & 4 \times 1 + 3b = -2, & 3b = -6, b = -2 \\
 \text{よって, } & a = 1, b = -2 \cdots \text{答}
 \end{array}$$

ゆえに $a = 25 \div 25 = 1$

[解説]

例えば, 連立方程式 $\begin{cases} 3x + 2y = 23 \cdots \text{①} \\ 5x + 2y = 29 \cdots \text{②} \end{cases}$ の解は $x = 3, y = 7$ であるので,

①, ②の式に $x = 3, y = 7$ を代入して(左辺)=(右辺)がなりたつ。

①に $x = 3, y = 7$ を代入すると, (左辺) $= 3 \times 3 + 2 \times 7 = 23 =$ (右辺) がなりたつ。

②に $x = 3, y = 7$ を代入すると, (左辺) $= 5 \times 3 + 2 \times 7 = 29 =$ (右辺) がなりたつ。

これは, 係数に a, b 等の文字が使われている場合も同様である。この問題についていえば,

連立方程式 $\begin{cases} ax + by = 11 \cdots \text{③} \\ bx - ay = -2 \cdots \text{④} \end{cases}$ の解が $x = 3, y = -4$ であるので, ③, ④の式に $x = 3, y = -4$ を代入し

ても(左辺)=(右辺)がなりたつ。

③に $x = 3, y = -4$ を代入すると, $a \times 3 + b \times (-4) = 11, 3a - 4b = 11 \cdots \text{⑤}$

④に $x = 3, y = -4$ を代入すると, $b \times 3 - a \times (-4) = -2, 3b + 4a = -2 \cdots \text{⑥}$

がそれぞれなりたつ。

⑤, ⑥を同時に満たす a, b を求めるためには, ⑤, ⑥を a, b についての連立方程式として解けばよい。

[問題 4]

連立方程式 $\begin{cases} ax - 2by = -5 \\ bx + ay = 8 \end{cases}$ の解が $(x, y) = (1, 2)$ であるとき, a, b の値を求めなさい。

[解答欄]

$$\begin{cases} ax - 2by = -5 \\ bx + ay = 8 \end{cases} \text{ に } x = 1, y = 2 \text{ を代入すると, } \begin{cases} a - 4b = -5 \cdots \text{①} \\ b + 2a = 8 \cdots \text{②} \end{cases}$$

これを a, b についての連立方程式として代入法で解く。

①より, $a = 4b - 5 \cdots \text{①'}$

①'を②に代入すると,

$$b + 2(4b - 5) = 8, b + 8b - 10 = 8, 9b = 18, b = 2$$

$$b = 2 \text{ を①'に代入すると, } a = 4 \times 2 - 5 = 3$$

よって, $a = 3, b = 2 \cdots \text{答}$

[問題 5]

連立方程式 $\begin{cases} 3x + y = a \\ 5x - y = 4a \end{cases}$ の解のうち、 x の値は5です。このとき y の値を求めなさい。

[解答欄]

$$\begin{cases} 3x + y = a \\ 5x - y = 4a \end{cases} \text{ に } x = 5 \text{ を代入すると, } \begin{cases} 15 + y = a \cdots \textcircled{1} \\ 25 - y = 4a \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

これを、 y 、 a についての連立方程式として解く。

①+②より、

$$15 + y + 25 - y = a + 4a, \quad 40 = 5a, \quad a = 8$$

①に $a = 8$ を代入すると、 $15 + y = 8, \quad y = 8 - 15 = -7$

よって、 $y = -7 \cdots$ 答

[問題 6]

2組の連立方程式

$$\begin{cases} 4x + 7y = 1 \\ ax - by = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - 2y = 12 \\ bx + ay = 5 \end{cases}$$

が同じ解をもつとき、次の問いに答えなさい。

(1) 解を求めなさい。

(2) a, b の値を求めなさい。

[解答欄]

(1) 同じ解をもつので、 x, y は、 $4x + 7y = 1, 5x - 2y = 12$ をともに満たす。これを連立方程式として解く。

$$\begin{cases} 4x + 7y = 1 \cdots \textcircled{1} \\ 5x - 2y = 12 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

加減法で解く(代入法は不適當)。 y の係数の絶対値を14にそろえるために① $\times 2$ 、② $\times 7$

$$\begin{cases} 8x + 14y = 2 \cdots \textcircled{1}' \\ 35x - 14y = 84 \cdots \textcircled{2}' \end{cases}$$

y を消去するために①'+②'

$$43x = 86, \quad x = 2$$

$x = 2$ を②に代入すると、 $5 \times 2 - 2y = 12, \quad 10 - 2y = 12, \quad -2y = 2, \quad y = -1$

よって、 $x = 2, y = -1 \cdots$ 答

(2) $ax - by = 10, \quad bx + ay = 5$ の x, y は $x = 2, y = -1$ なので、代入して

$$\begin{cases} 2a + b = 10 \cdots \textcircled{3} \\ 2b - a = 5 \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

これを a, b についての連立方程式として代入法で解く。

③より, $b = -2a + 10 \cdots \textcircled{3}'$

③'を④に代入すると, $2(-2a + 10) - a = 5, -4a + 20 - a = 5, -5a = -15, a = 3$

$a = 3$ を③'に代入すると, $b = -2 \times 3 + 10 = 4$

よって, $a = 3, b = 4 \cdots \text{答}$