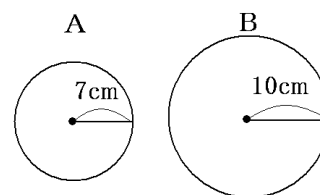


第 12 章	数学(3 年)	名前:	日 付	No.01
	相似な図形の面積			

[問題 1]

右の図の 2 つの円 A, B について, 次の各問いに答えよ。

- (1) A, B の円の相似比を求めよ。
- (2) A, B の円の面積をそれぞれ求めよ。
- (3) 面積の比を求めよ。



[解答欄]

(1) 7 : 10	(2) A $49\pi \text{ cm}^2$	B $100\pi \text{ cm}^2$
(3) 49 : 100		

[解説]

(1) 円 A, B の半径の比が 7 : 10 なので, 相似比は 7 : 10 である。

(2) (A の円の面積) $= \pi \times 7^2 = 49\pi (\text{cm}^2)$,

(B の円の面積) $= \pi \times 10^2 = 100\pi (\text{cm}^2)$

(3) (A の円の面積) : (B の円の面積) $= 49\pi : 100\pi = 49 : 100$

2 つの円の相似比が 7 : 10 のとき, 面積比は $7^2 : 10^2 = 49 : 100$ になる。

一般に, 2 つの相似な図形の相似比が $a : b$ のとき, 面積比は $a^2 : b^2$ となる。

<Point>相似比 $a : b \rightarrow$ 面積比 $a^2 : b^2$

[問題 2]

右図のように, $\triangle ABC$ の辺 BA, CA の延長上に $BC \parallel DE$ となるように, それぞれ点 D, E をとる。AE = 4cm, AC = 8cm であるとき, $\triangle ADE$ と $\triangle ABC$ の面積の比を求めよ。

[解答欄]

1 : 4

[解説]

<Point>相似比 $a : b \rightarrow$ 面積比 $a^2 : b^2$

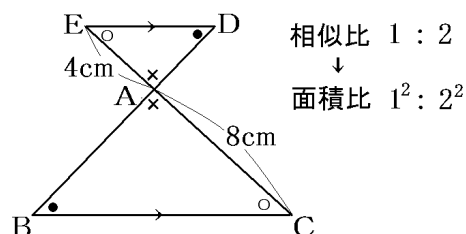
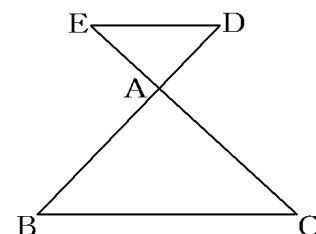
$BC \parallel DE$ なので $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ で,

AE と AC は対応する辺なので,

相似比は, $AE : AC = 4 : 8 = 1 : 2$

面積比は相似比の 2 乗になるので,

$(\triangle ADE \text{ の面積}) : (\triangle ABC \text{ の面積}) = 1^2 : 2^2 = 1 : 4$



[問題 3]

次の各問いに答えよ。

- (1) 2つの相似な三角形の相似比が $1:3$ であるとき、面積比を求めよ。
 (2) 相似比が $2:3$ である2つの円 O, O' で、円 O の面積が $16\pi\text{cm}^2$ のとき、円 O' の面積を求めよ。

[解答欄]

(1) $1:9$	(2) $36\pi\text{cm}^2$
-----------	------------------------

[解説]

(1) 2つの三角形の相似比が $1:3$ であるので、面積比は $1^2:3^2=1:9$ となる。

(2) 2つの円 O, O' の相似比が $2:3$ であるので、面積比は、

(円 O の面積) : (円 O' の面積) $= 2^2 : 3^2 = 4 : 9$ となる。

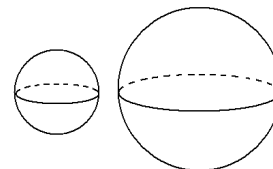
円 O の面積が $16\pi\text{cm}^2$ であるので、 $16\pi : (\text{円 } O' \text{ の面積}) = 4 : 9$

比で、内項の積は外項の積に等しいので、 $(\text{円 } O' \text{ の面積}) \times 4 = 16\pi \times 9$

よって、 $(\text{円 } O' \text{ の面積}) = 16\pi \times 9 \div 4 = 36\pi(\text{cm}^2)$

[問題 4]

右の図のような、2つの球がある。2つの球の半径は、 2cm と 5cm である。小さい球の表面積を S 、大きい球の表面積を S' とするとき、 $S; S'$ を最も簡単な整数の比で求めよ。



[解答欄]

$4:25$

[解説]

(球の表面積) $= 4\pi \times (\text{半径})^2$ なので、

$S = 4\pi \times 2^2 = 16\pi(\text{cm}^2)$, $S' = 4\pi \times 5^2 = 100\pi(\text{cm}^2)$

よって、 $S; S' = 16\pi : 100\pi = 4 : 25$

一般に、相似な立体の相似比が $a:b$ のとき、表面積比は $a^2:b^2$ となる。

<Point> 立体の相似比 $a:b \rightarrow$ 表面積比 $a^2:b^2$

[問題 5]

右の図の立体 A と B は相似で、相似比が $3:5$ である。

A の表面積が 180cm^2 のとき B の表面積を求めよ。

[解答欄]

500cm^2

[解説]

立体 A と B は相似で、相似比が $3:5$ なので、表面積比は $3^2:5^2=9:25$ となる。

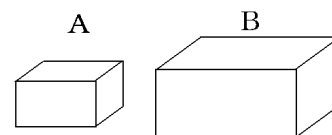
よって、 $(A \text{ の表面積}) : (B \text{ の表面積}) = 9 : 25$

A の表面積は 180cm^2 なので、 $180 : (B \text{ の表面積}) = 9 : 25$

比で、内項の積は外項の積に等しいので、

$(B \text{ の表面積}) \times 9 = 180 \times 25$

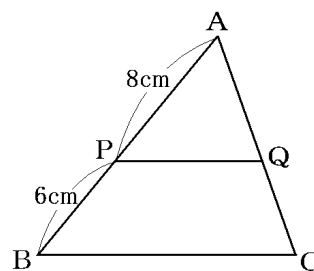
よって、 $(B \text{ の表面積}) = 180 \times 25 \div 9 = 500(\text{cm}^2)$



[問題 6]

右の図で、 $PQ \parallel BC$ 、 $AP=8\text{cm}$ 、 $PB=6\text{cm}$ であるとき、次の各問に答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ と $\triangle APQ$ の面積の比を求めよ。
- (2) $\triangle APQ$ と台形 $PBCQ$ の面積の比を求めよ。



[解答欄]

(1) 49 : 16	(2) 16 : 33
-------------	-------------

[解説]

(1) $PQ \parallel BC$ なので、 $\triangle ABC \sim \triangle APQ$ である。

$\triangle ABC$ と $\triangle APQ$ の相似比は、

$$AB : AP = (8+6) : 8 = 14 : 8 = 7 : 4$$

面積比は相似比の 2 乗になるので、

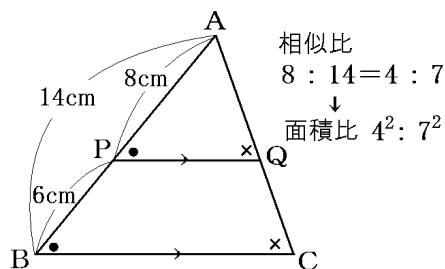
$$(\triangle ABC \text{ の面積}) : (\triangle APQ \text{ の面積}) = 7^2 : 4^2 = 49 : 16$$

(2) $(\triangle ABC \text{ の面積}) : (\triangle APQ \text{ の面積}) = 49 : 16$ なので、 $(\triangle ABC \text{ の面積}) = 49a$ とすると、

$(\triangle APQ \text{ の面積}) = 16a$ となる。

$$(\text{台形 } PBCQ \text{ の面積}) = (\triangle ABC \text{ の面積}) - (\triangle APQ \text{ の面積}) = 49a - 16a = 33a$$

$$\text{よって、} (\triangle APQ \text{ の面積}) : (\text{台形 } PBCQ \text{ の面積}) = 16a : 33a = 16 : 33$$



[問題 7]

右図の平行四辺形において、 AD を $3 : 2$ に分ける点を E とする。 BE 、 CD を延長し、その交点を F とするとき、次の各問に答えよ。

- (1) $\triangle ABE$ と $\triangle DFE$ の面積比を求めよ。
- (2) $\triangle DFE$ と台形 $EBCD$ の面積比を求めよ。

[解答欄]

(1) 9 : 4	(2) 4 : 21
-----------	------------

[解説]

(1) $AB \parallel DF$ なので、 $\triangle ABE \sim \triangle DFE$ である。 AE と DE は対応する辺なので、2 つの三角形の相似比は、 $AE : DE = 3 : 2$ になる。したがって、面積比は、 $3^2 : 2^2 = 9 : 4$ になる。

(2) $ED \parallel BC$ なので、 $\triangle DFE \sim \triangle CFB$ である。

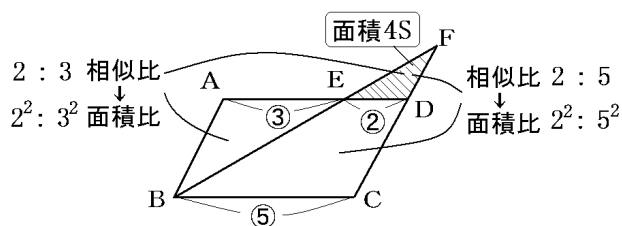
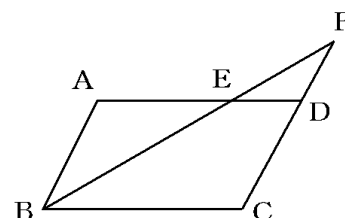
ED と BC は対応する辺なので、2 つの三角形の相似比は、 $ED : BC = 2 : (2+3) = 2 : 5$ となる。

したがって、面積比は $2^2 : 5^2 = 4 : 25$ となる。

よって、 $\triangle DFE$ の面積を $4S$ とすると、 $\triangle CFB$ の面積は $25S$ で、

台形 $EBCD$ の面積は、 $25S - 4S = 21S$ となる。

したがって、 $\triangle DFE$ と台形 $EBCD$ の面積比は $4S : 21S = 4 : 21$ となる。



[問題 8]

右図において、四角形 ABCD は平行四辺形である。

$\triangle AED$ と $\triangle PEC$ の面積比が $9 : 4$ のとき、平行四辺形 ABCD と台形 ABCE の面積比を求めよ。

(香川県)

[解答欄]

10 : 7

[解説]

$AD \parallel CP$ なので、 $\triangle AED \sim \triangle PEC$

面積比が $9 : 4$ なので、相似比は $\sqrt{9} : \sqrt{4} = 3 : 2$

よって、 $DE : CE = 3 : 2$

$AB = CD = DE + CE$ なので、

$DE : CE : AB = 3 : 2 : (3+2) = 3 : 2 : 5$

ここで、 $\triangle PEC$ の面積を $4S$ とおく。

(S とおいてもよいが、分数で計算が少し面倒になる)

$\triangle AED : \triangle PEC = 9 : 4$ なので、 $\triangle AED = 9S$

$EC \parallel AB$ なので、 $\triangle PEC \sim \triangle PAB$

相似比は $EC : AB = 2 : 5$ なので、面積比は $2^2 : 5^2 = 4 : 25$

($\triangle PEC$ の面積) $= 4S$ なので、($\triangle PAB$ の面積) $= 25S$

よって、(台形 ABCE の面積) $= 25S - 4S = 21S$

(平行四辺形 ABCD の面積) $= (\triangle AED \text{ の面積}) + (\text{台形 ABCE の面積}) = 9S + 21S = 30S$

以上より、(平行四辺形 ABCD の面積) : (台形 ABCE の面積) $= 30S : 21S = 10 : 7$

