

第 12 章	数学(3 年)	名前:	日 付	No.02
	相似な図形の面積			

[問題 1]

右図のような $\triangle ABC$ において、 $PQ \parallel RS \parallel BC$ であり、
 $\triangle APQ$ 、四角形 $PRSQ$ 、四角形 $RBCS$ の面積がみな等しい。
 $AP=1$ のとき、 RB の長さを求めよ。

[解答欄]

$$\sqrt{3} - \sqrt{2}$$

[解説]

右図のように $AR=a$ 、 $AB=b$ とすると、 $AP : AR : AB = 1 : a : b$

$PQ \parallel RS \parallel BC$ なので、 $\triangle APQ$ 、 $\triangle ARS$ 、 $\triangle ABC$ は互いに相似で、相似比は $1 : a : b$ となる。

面積比は相似比の 2 乗になるので、

$$\triangle APQ : \triangle ARS : \triangle ABC = 1^2 : a^2 : b^2 \cdots \textcircled{1}$$

ところで、 $\triangle APQ$ 、四角形 $PRSQ$ 、四角形 $RBCS$ の面積が
みな等しいので、 $\triangle APQ$ の面積を S とすると、

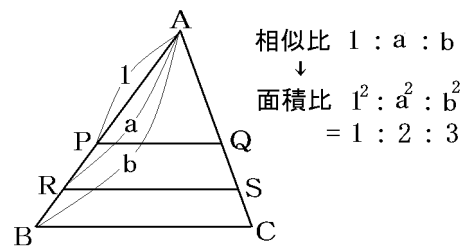
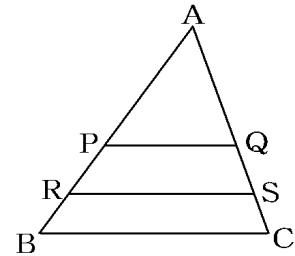
$$\triangle ARS = \triangle APQ + \text{四角形 } PRSQ = S + S = 2S$$

$$\triangle ABC = \triangle ARS + \text{四角形 } RBCS = 2S + S = 3S$$

$$\text{よって、} \triangle APQ : \triangle ARS : \triangle ABC = S : 2S : 3S = 1 : 2 : 3 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より、} 1 : a^2 : b^2 = 1 : 2 : 3 \quad \text{よって、} a^2 = 2, \quad b^2 = 3$$

$$a > 0, \quad b > 0 \text{ なので、} a = \sqrt{2}, \quad b = \sqrt{3} \quad \text{ゆえに、} RB = b - a = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$



[問題 2]

図のような $AD \parallel BC$ の台形 $ABCD$ において、対角線 AC と BD の
交点を E とする。 $DE : EB = 1 : 4$ とし、 $\triangle AED$ の面積を 5 とする
とき、台形 $ABCD$ の面積を求めよ。

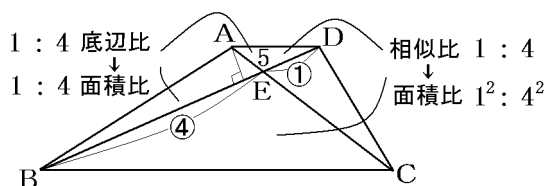
[解答欄]

$$125$$

[解説]

<Point> $\triangle AED \sim \triangle CEB$ 相似比 $1 : 4 \rightarrow$ 面積比 $1^2 : 4^2$

$\triangle AED$ と $\triangle ABE$ 高さ共通、底辺比 $1 : 4 \rightarrow$ 面積比 $1 : 4$

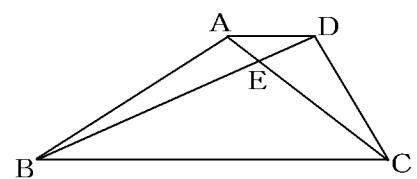


$AD \parallel BC$ なので、 $\triangle AED \sim \triangle CEB$ で、相似比は、 $DE : EB = 1 : 4$

面積比は相似比の 2 乗になるので、

$$(\triangle AED \text{ の面積}) : (\triangle CEB \text{ の面積}) = 1^2 : 4^2 = 1 : 16$$

$$(\triangle AED \text{ の面積}) = 5 \text{ なので、} (\triangle CEB \text{ の面積}) = 5 \times 16 = 80 \cdots \textcircled{1}$$



次に、 $\triangle AED$ と $\triangle ABE$ の面積比を求める。

2つの三角形の底辺をそれぞれ DE , BE とすると、高さは共通なので、面積比は底辺の比と同じになる。

したがって、 $(\triangle AED \text{ の面積}) : (\triangle ABE \text{ の面積}) = DE : BE = 1 : 4$

$(\triangle AED \text{ の面積}) = 5$ なので、 $(\triangle ABE \text{ の面積}) = 5 \times 4 = 20 \cdots \textcircled{2}$

$\triangle AED$ と $\triangle DCE$ についても、まったく同様に考えて、

$(\triangle DCE \text{ の面積}) = 5 \times 4 = 20 \cdots \textcircled{3}$

①, ②, ③より、 $(\text{台形 } ABCD \text{ の面積}) = (\triangle AED \text{ の面積}) + (\triangle CEB \text{ の面積}) + (\triangle ABE \text{ の面積}) + (\triangle DCE \text{ の面積}) = 5 + 80 + 20 + 20 = 125$

[問題 3]

図で、四角形 $ABCD$ は平行四辺形で、 E , F はそれぞれ辺 AB , AD の中点である。 BD と CE の交点を G , BD と CF の交点を H とするとき、四角形 $EGHF$ の面積は、 $\triangle ABD$ の面積の何倍か。

[解答欄]

$\frac{5}{12}$ 倍

[解説]

A と C を結ぶ。 $\triangle ABC$ で O は AC の中点、 E は AB の中点なので、 G は $\triangle ABC$ の重心になる。

したがって、 $BG : GO = 2 : 1$

同様にして、 $DH : HO = 2 : 1$

さらに、 $BO = DO$ なので、 $BG = GH = HD$ となる。

$\triangle CBG$, $\triangle CGH$, $\triangle CHD$ の底辺をそれぞれ BG , GH , HD とすると、高さは共通になるので、この3つの三角形の面積は等しくなる。

$\triangle CGH$ の面積を S とすると、 $\triangle CBD$ の面積は、 $S + S + S = 3S$ となる。

よって、 $(\triangle ABD \text{ の面積}) = (\triangle CBD \text{ の面積}) = 3S \cdots \textcircled{1}$

次に、四角形 $EGHF$ の面積を S で表す。

E , F はそれぞれ AB , AD の中点なので、中点連結定理より $EF \parallel BD$

$GH \parallel EF$ となるので、 $\triangle CGH$ と $\triangle CEF$ は相似になる。

G は $\triangle ABC$ の重心なので、 $CG : GE = 2 : 1$ よって、 $CG : CE = 2 : (2 + 1) = 2 : 3$

したがって、 $\triangle CGH$ と $\triangle CEF$ の相似比は $2 : 3$ で、面積比は $2^2 : 3^2 = 4 : 9$

よって、 $(\triangle CGH \text{ の面積}) : (\triangle CEF \text{ の面積}) = 4 : 9$

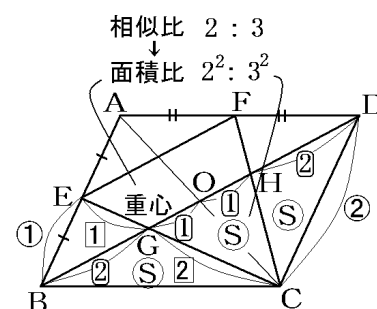
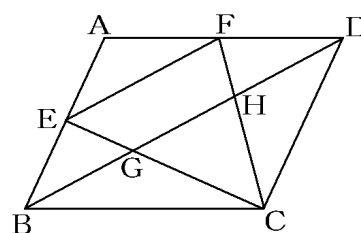
ゆえに、 $S : (\triangle CEF \text{ の面積}) = 4 : 9$

比の内項の積は外項の積に等しいので、 $(\triangle CEF \text{ の面積}) \times 4 = S \times 9$

$$(\triangle CEF \text{ の面積}) = S \times 9 \div 4 = \frac{9}{4} S$$

$$\text{よって、} (\text{四角形 } EGHF \text{ の面積}) = (\triangle CEF \text{ の面積}) - (\triangle CGH \text{ の面積}) = \frac{9}{4} S - S = \frac{5}{4} S \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{①, ②より、} (\text{四角形 } EGHF \text{ の面積}) \div (\triangle ABD \text{ の面積}) = \frac{5}{4} S \div 3S = \frac{5}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{12} (\text{倍})$$



[問題 4]

右の図のように、1 辺 6cm の正三角形 ABC と 1 辺 2cm の正三角形 CDE がある。ただし、頂点 D は辺 BC 上にある。このとき、次の各問いに答えよ。

- (1) 頂点 A, E を結ぶ線分と辺 BC との交点を F とするとき、 $DF : FC$ を最も簡単な整数の比で表せ。
- (2) $\triangle ABC$ の面積は、 $\triangle DEF$ の面積の何倍であるか答えよ。

[解答欄]

(1) 1 : 3	(2) 36 倍
-----------	----------

[解説]

(1) $\triangle ABC$, $\triangle CDE$ は正三角形なので、
 $\angle ACB = \angle CDE = 60^\circ$ で錯角が等しいので、 $AC \parallel DE$

よって、 $DF : FC = DE : AC = 2 : 6 = 1 : 3$

(2) <Point>最小の部分の面積を S とおく

$\triangle DEF$ の面積を S とする。

$\triangle DEF$ と $\triangle CEF$ で、それぞれの底辺を DF , FC とすると、
 高さは共通になるので、面積の比は底辺の比 $DF : FC = 1 : 3$ と等しくなる。

よって、 $(\triangle CEF \text{ の面積}) = 3S$ となる。

したがって、 $(\triangle CDE \text{ の面積}) = S + 3S = 4S$

次に、 $\triangle CDE$ と $\triangle ABC$ の面積を比較する。

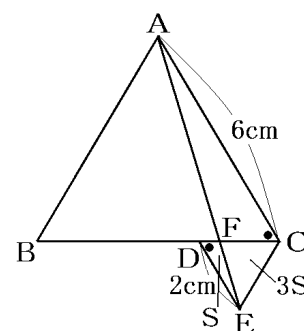
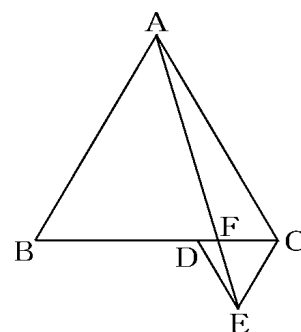
2 つの三角形は正三角形なので相似である。相似比は $DE : AC = 2 : 6 = 1 : 3$

面積比は相似比の 2 乗になるので、

$(\triangle CDE \text{ の面積}) : (\triangle ABC \text{ の面積}) = 1^2 : 3^2 = 1 : 9$

$(\triangle CDE \text{ の面積}) = 4S$ なので、 $(\triangle ABC \text{ の面積}) = 4S \times 9 = 36S$

よって、 $(\triangle ABC \text{ の面積}) \div (\triangle DEF \text{ の面積}) = 36S \div S = 36(\text{倍})$



[問題 5]

右の図のように、正三角形 ABC の辺 BC 上に点 D をとり、
 AD を 1 辺とする正三角形 ADE をつくり、 AC と DE の交点を F とする。
 $BD : DC = 1 : 2$ のとき、 $\triangle DCF$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の何倍か。

[解答欄]

$$\frac{4}{27} \text{ 倍}$$

[解説]

$\triangle ABD$ と $\triangle DCF$ について調べてみる。

まず、等しい角を図の中に記入する。

60° を $[\bullet]$ で表すと、 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ADE$ が正三角形なので、右図のように 3 つの角を $[\bullet]$ で表す。

次に、 $\angle CDF$ を $[\times]$ 、 $\angle ADB$ を $[o]$ と表す。

$\angle CDF + \angle ADE + \angle ADB = 180^\circ$ なので、

$$[\times] + [\bullet] + [o] = 180^\circ$$

ところで、 $\triangle ABD$ で、 $\angle BAD + [\bullet] + [o] = 180^\circ$ なので、 $\angle BAD = [\times]$ となる。

よって、 $\triangle ABD$ と $\triangle DCF$ は 2 組の角がそれぞれ等しい ($[\times]$ と $[\bullet]$) ので相似になる。

$AB = BC = BD + DC$ なので、 $AB : DC = (1 + 2) : 2 = 3 : 2$

AB と DC は対応する辺なので、 $\triangle ABD$ と $\triangle DCF$ の相似比は $3 : 2$

面積比は相似比の 2 乗になるので、

$$(\triangle ABD \text{ の面積}) : (\triangle DCF \text{ の面積}) = 3^2 : 2^2 = 9 : 4$$

したがって、 $(\triangle DCF \text{ の面積}) = 4S$ とすると、 $(\triangle ABD \text{ の面積}) = 9S$

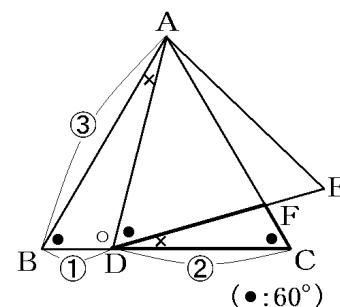
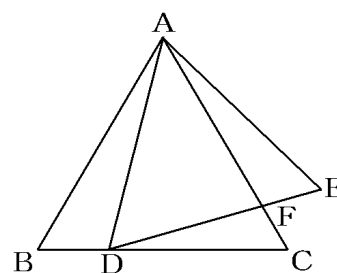
次に、 $\triangle ABD$ と $\triangle ABC$ の面積比を求める。

BD 、 BC をそれぞれの三角形の底辺とすると、高さは共通なので、底辺の長さの比と面積比は等しくなる。

よって、 $(\triangle ABD \text{ の面積}) : (\triangle ABC \text{ の面積}) = BD : BC = 1 : (1 + 2) = 1 : 3$

$(\triangle ABD \text{ の面積}) = 9S$ なので、 $(\triangle ABC \text{ の面積}) = 9S \times 3 = 27S$

$$\text{したがって、} (\triangle DCF \text{ の面積}) \div (\triangle ABC \text{ の面積}) = 4S \div 27S = \frac{4S}{27S} = \frac{4}{27} \text{ (倍)}$$



[問題 6]

次の図の三角柱 $ABC-DEF$ の体積は 64cm^3 である。

AB , AC , DE , DF の中点をそれぞれ G , H , I , J とする。

G , H , I , J を通る平面でこの三角柱を切ったときにできる四角柱 $GBCH-IEFJ$ の体積を求めよ。

[解答欄]

48cm^3

[解説]

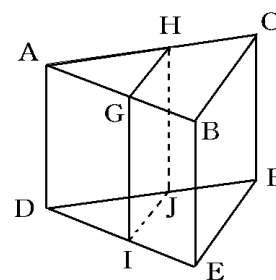
三角柱 $ABC-DEF$ と三角柱 $AGH-DIJ$ の高さは同じなので、2 つの三角柱の体積比は底面積の比と等しくなる。

I は DE の中点で、 J は DF の中点なので、中点連結定理より、 $IJ \parallel EF$, $IJ = \frac{1}{2}EF$ となる。したがって、 $\triangle DIJ$ と $\triangle DEF$ は相似で、相似比は $1:2$ になる。

相似比が $1:2$ なので、面積比は $1^2:2^2=1:4$ になる。

よって、2 つの三角柱の体積比は $1:4$ となる。

三角柱 $ABC-DEF$ の体積は 64cm^3 なので、三角柱 $AGH-DIJ$ の体積は、 $64 \div 4 = 16(\text{cm}^3)$ となる。よって、四角柱 $GBCH-IEFJ$ の体積は $64 - 16 = 48(\text{cm}^3)$ になる。



[問題 7]

点 A , B , C , D , E , F を頂点とする三角柱がある。図のように、辺 AB を 3 等分する点を、それぞれ、 P , Q とし、点 P , Q を通って、側面 $BEFC$ に平行な面で切って、3 つの角柱ア、イ、ウをつくる。このとき、角柱アの体積と角柱ウの体積の比を求めよ。

[解答欄]

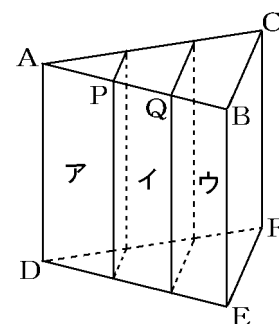
$1:5$

[解説]

アの三角柱、ア+イの三角柱、ア+イ+ウの三角柱の底面の三角形は、それぞれ相似で、相似比は $1:2:3$ である。したがって、底面積の比は $1^2:2^2:3^2=1:4:9$ になる。

3 つの三角柱の高さは同じであるので、体積比も $1:4:9$ になる。

(アの三角柱の体積) : (ア+イの三角柱の体積) : (ア+イ+ウの三角柱の体積) = $1:4:9$ なので、(アの体積) : (イの体積) : (ウの体積) = $1:(4-1):(9-4)=1:3:5$ になる。



[問題 8]

右の図は体積が 60cm^3 の三角柱である。辺 DE, DF の中点をそれぞれ P, Q とするとき, 三角すい ADPQ の体積を求めよ。

[解答欄]

5cm^3

[解説]

$\triangle DPQ$ の面積を $S\text{cm}^2$, 高さ AD を $h\text{cm}$ とすると,

$$(\text{三角すい ADPQ の体積}) = \frac{1}{3} Sh(\text{cm}^3)$$

P は DE の中点, Q は DF の中点なので, 中点連結定理より,

$$PQ \parallel EF, PQ = \frac{1}{2} EF$$

よって, $\triangle DPQ$ と $\triangle DEF$ は相似で, 相似比は $1 : 2$ となる。

したがって, 面積比は $1^2 : 2^2 = 1 : 4$ となる。

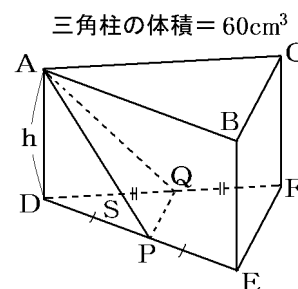
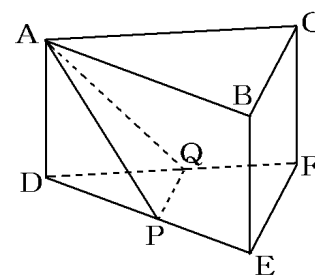
よって, $(\triangle DEF \text{ の面積}) = 4S(\text{cm}^2)$

ゆえに, $(\text{三角柱の体積}) = 4Sh(\text{cm}^3)$

$$(\text{三角すい ADPQ の体積}) : (\text{三角柱の体積}) = \frac{1}{3} Sh : 4Sh = 1 : 12$$

$(\text{三角柱の体積}) = 60(\text{cm}^3)$ なので,

$(\text{三角すい ADPQ の体積}) = 60 \div 12 = 5(\text{cm}^3)$



[問題 9]

相似比が $a : b$ の相似な 2 つの三角錐がある。これらの三角錐の体積の比を求めよ。

[解答欄]

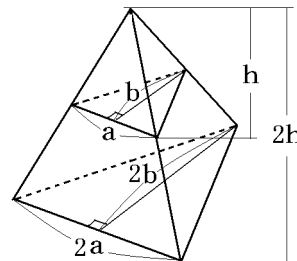
$a^3 : b^3$

[解説]

<Point> 相似比 $a : b \rightarrow$ 体積比 $a^3 : b^3$

たとえば、右図のように、2 つの相似な三角錐があり、相似比は $1 : 2$ であるとする。

小さい三角錐の底面の三角形の底辺を a , 高さを b とすると、大きい三角錐の底面の三角形の底辺は $2a$, 高さは $2b$ となる。また、小さい三角錐の頂点から底面におろした高さを h とすると、大きい三角錐の高さは $2h$ になる。



相似比 $1 : 2$
↓
体積比 $1^3 : 2^3$

$$(\text{小さい三角錐の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times a \times b \right) \times h = \frac{1}{6} abh$$

$$(\text{大きい三角錐の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 2a \times 2b \right) \times 2h = \frac{8}{6} abh$$

すなわち、大きい三角錐の体積は、小さい三角錐の $\frac{8}{6} abh \div \frac{1}{6} abh = 8 = 2^3$ (倍) になり、

体積比は、 $1^3 : 2^3$ となる。

一般に、2 つの相似な立体があり、相似比が $a : b$ なら、体積比は $a^3 : b^3$ となる。