

第 12 章	数学(3 年)	名前:	日 付	No.03
	相似な図形の面積			

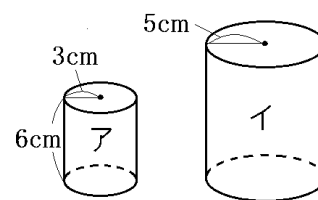
[問題 1]

右の図のような相似である 2 つの円柱ア, イがある。

このとき, 次の各問いに答えよ。

(1) 円柱ア, イの表面積の比を求めよ。

(2) 円柱ア, イの体積の比を求めよ。



[解答欄]

(1) 9 : 25	(2) 27 : 125
------------	--------------

[解説]

(1) 相似比が $a : b$ なら表面積比は $a^2 : b^2$ である。

アとイの相似比は半径に注目すると, $3 : 5$ である。

したがって, (アの表面積) : (イの表面積) $= 3^2 : 5^2 = 9 : 25$ である。

(2) 相似比が $a : b$ なら体積比は $a^3 : b^3$ である。

したがって, (アの体積) : (イの体積) $= 3^3 : 5^3 = 27 : 125$ である。

[問題 2]

2 つの相似な三角錐 P, Q があり, その相似比は $3 : 5$ である。このとき, 次の各問いに答えよ。

(1) P と Q の表面積の比を求めよ。

(2) P の体積が 54cm^3 のとき, Q の体積を求めよ。

[解答欄]

(1) 9 : 25	(2) 250cm^3
------------	----------------------

[解説]

(1) 相似比が $a : b$ なら表面積比は $a^2 : b^2$ である。

P, Q の相似比は $3 : 5$ なので, 表面積の比は, $3^2 : 5^2 = 9 : 25$ である。

(2) 相似比が $a : b$ なら体積比は $a^3 : b^3$ である。

したがって, (P の体積) : (Q の体積) $= 3^3 : 5^3 = 27 : 125$ である。

P の体積は 54cm^3 なので, $54 : (\text{Q の体積}) = 27 : 125$

比の内項の積は外項の積に等しいので, $(\text{Q の体積}) \times 27 = 54 \times 125$

よって, $(\text{Q の体積}) = 54 \times 125 \div 27 = 250(\text{cm}^3)$

[問題 3]

表面積の比が $16 : 25$ である相似な 2 つの正四角すいがある。この 2 つの正四角すいの
①高さの比と、②体積の比をそれぞれ求めよ。

[解答欄]

① $4 : 5$	② $64 : 125$
-----------	--------------

[解説]

相似比が $a : b$ なら表面積の比は $a^2 : b^2$ である。

$4^2 = 16$, $5^2 = 25$ なので、表面積の比は $16 : 25 = 4^2 : 5^2$ である。

したがって、相似比は $4 : 5$ で、高さの比は $4 : 5$ となる。

相似比が $a : b$ なら体積比は $a^3 : b^3$ であるので、体積の比は $4^3 : 5^3 = 64 : 125$ である。

[問題 4]

2 つの球の表面積の比が $4 : 9$ であるとき、体積の比を求めよ。

[解答欄]

$8 : 27$

[解説]

相似比が $a : b$ なら表面積の比は $a^2 : b^2$ である。

$2^2 = 4$, $3^2 = 9$ なので、2 つの球の相似比は $2 : 3$ である。

相似比が $a : b$ なら体積比は $a^3 : b^3$ であるので、

2 つの球の体積比は、 $2^3 : 3^3 = 8 : 27$ である。

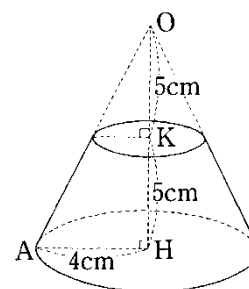
[問題 5]

右の図の立体は、底面の半径 HA が 4cm 、高さ OH が 10cm の円錐を、 OH の中点 K を通り底面に平行な平面で切り、小さな円錐を取り除いたものである。この立体の体積はいくらか。

[解答欄]

$\frac{140}{3}\pi \text{ cm}^3$

[解説]



$$(\text{もとの円錐の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times \pi \times 10 = \frac{160\pi}{3} (\text{cm}^3)$$

もとの円錐の高さは 10cm 、切り取った円錐の高さは 5cm なので、

2 つの円錐の相似比は $2 : 1$ になる。したがって、体積比は $2^3 : 1^3 = 8 : 1$ なので、

$$(\text{切り取った円錐}) = \frac{160\pi}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{20\pi}{3} (\text{cm}^3)$$

$$\text{よって、(切り取った後の円錐台の体積)} = \frac{160\pi}{3} - \frac{20\pi}{3} = \frac{140\pi}{3} (\text{cm}^3)$$

[問題 6]

右の図のように深さが 12cm の円錐形の容器に 72cm³ の水を入れると深さが 8cm になる。あと何 cm³ の水を入れると容器がいっぱいになるか。

[解答欄]

171cm ³

[解説]

右図の小さい円錐(P の部分)と大きい円錐(P+Q の部分)は相似であり、相似比は、 $8 : 12 = 2 : 3$ である。

相似比が $a : b$ なら体積比は $a^3 : b^3$ であるので、

(P の体積) : (P+Q の体積) = $2^3 : 3^3 = 8 : 27$ である。

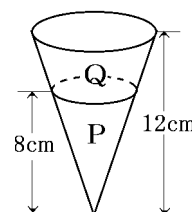
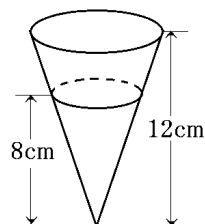
(P の体積) = 72cm³ なので、

$72 : (P+Q \text{ の体積}) = 8 : 27$

比の内項の積は外項の積に等しいので、(P+Q の体積) $\times 8 = 72 \times 27$

よって、(P+Q の体積) = $72 \times 27 \div 8 = 243(\text{cm}^3)$

したがって、(Q の体積) = (P+Q の体積) - (P の体積) = $243 - 72 = 171(\text{cm}^3)$



[問題 7]

右の図のように円錐を底面に平行で高さを 3 等分する平面で切り、3 つの部分それぞれア、イ、ウとする。このとき、次の各問いに答えよ。

(1) 底面 P と Q の円周の長さの比を求めよ。

(2) 立体イとウの体積の比を求めよ。

(3) 立体イの体積が $126\pi \text{ cm}^3$ のとき、もとの円錐の体積を求めよ。

[解答欄]

(1) 2 : 3	(2) 7 : 19	(3) $486\pi \text{ cm}^3$
-----------	------------	---------------------------

[解説]

(1) アの円錐、ア+イの円錐、ア+イ+ウの円錐は相似で、相似比は $1 : 2 : 3$ である。

P はア+イの円錐の底面で、Q はア+イ+ウの円錐の底面なので、円周の長さの比は、相似比と等しく、 $2 : 3$ になる。

(2) アの円錐、ア+イの円錐、ア+イ+ウの円錐の相似比は $1 : 2 : 3$ であるので、

体積比は、(アの円錐) : (ア+イの円錐) : (ア+イ+ウの円錐) = $1^3 : 2^3 : 3^3 = 1 : 8 : 27$

したがって、(アの体積) = 1 とすると、(ア+イの体積) = 8, (ア+イ+ウの体積) = 27 である。

よって、(イの体積) = $8 - 1 = 7$, (ウの体積) = $27 - 8 = 19$ となり、

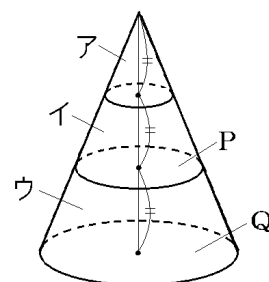
イとウの体積の比は $7 : 19$ となる。

(3) (2)より、(イの体積) : (ア+イ+ウの体積) = $7 : 27$ である。イの体積は $126\pi \text{ cm}^3$ なので、

$126\pi : (ア+イ+ウの体積) = 7 : 27$

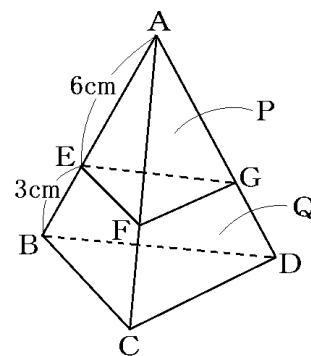
比で、内項の積は外項の積に等しいので、(ア+イ+ウの体積) $\times 7 = 126\pi \times 27$

したがって、(ア+イ+ウの体積) = $126\pi \times 27 \div 7 = 486\pi (\text{cm}^3)$



[問題 8]

右の図のように、三角錐を底面に平行な平面で切って、2つの部分 P, Q に分けた。 $\triangle EFG$ はそのときの切り口である。三角錐 P の体積が 24cm^3 のとき、立体 Q の体積を求めよ。



[解答欄]

57cm^3

[解説]

三角錐 AEFG(三角錐 P)と三角錐 ABCD は相似で、相似比は $6 : (6+3) = 6 : 9 = 2 : 3$ である。したがって、体積比は、(三角錐 AEFG) : (三角錐 ABCD) = $2^3 : 3^3 = 8 : 27$

(三角錐 AEFG) = 24cm^3 なので、 $24 : (\text{三角錐 ABCD}) = 8 : 27$

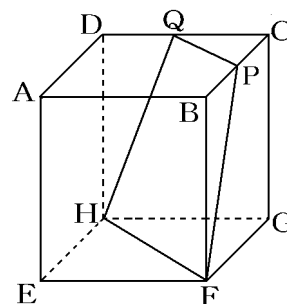
比で、内項の積は外項の積に等しいので、(三角錐 ABCD) $\times 8 = 24 \times 27$

よって、(三角錐 ABCD) = $24 \times 27 \div 8 = 81(\text{cm}^3)$

したがって、(立体 Q の体積) = $81 - 24 = 57(\text{cm}^3)$

[問題 9]

右の図のように、1辺 4cm の立方体において、辺 BC, CD 上にそれぞれ中点 P, Q をとり、4点 P, Q, H, F を通る平面でこの直方体を切った。このとき、立体 PCQ-FGH の体積を求めよ。



[解答欄]

$\frac{56}{3}\text{cm}^3$

[解説]

<Point> 右図のように、GC, FP, HQ を延長して考える。

$OC : OG = PC : FG = 2 : 4 = 1 : 2$

よって、 $OC = CG = 4\text{cm}$, $OG = 8\text{cm}$

(O-HFG の体積) = $\frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$

$= \frac{1}{3} \times (4 \times 4 \div 2) \times 8 = \frac{64}{3}(\text{cm}^3)$

三角すい O-QPC と三角すい O-HFG は相似で、

相似比は、 $PC : FG = 1 : 2$ なので、体積比は $1^3 : 2^3 = 1 : 8$

よって、(O-QPC の体積) = (O-HFG の体積) $\times \frac{1}{8} = \frac{64}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{8}{3}(\text{cm}^3)$

よって、(立体 PCQ-FGH の体積) = (O-HFG の体積) - (O-QPC の体積)

$= \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}(\text{cm}^3)$

