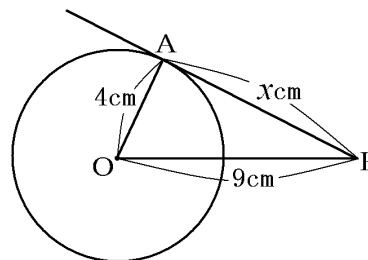


第 14 章	数学(3 年)	名前:	日 付	No.03
	三平方と平面			

[問題 1]

次の図で、 x の値を求めなさい。



[解答欄]

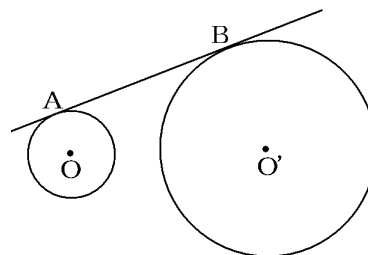
$$x = \sqrt{65}$$

[解説]

円の中心と接点を結んだ線分は接線に垂直になるので、 $\angle OAP = 90^\circ$ によって、 $\triangle OAP$ で三平方の定理より、 $OA^2 + AP^2 = OP^2$, $16 + x^2 = 81$, $x^2 = 81 - 16 = 65$, $x = \sqrt{65}$

[問題 2]

半径 3cm の円 O と、半径 8cm の円 O' があり、OO' 間の距離は 13cm である。図のように共通接線をひき、接点を A, B とする。このとき、線分 AB の長さを求めよ。



[解答欄]

12cm

[解説]

<Point> 中心と接点を結ぶ $\rightarrow 90^\circ$

右図のように、OA, OB をひくと、 $\angle OBA = 90^\circ$

また、 $OO' \parallel AC$ となる C を OB 上にとる。

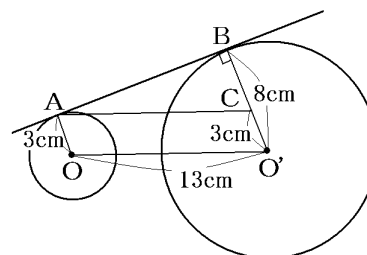
$\triangle ABC$ は直角三角形になり、

$$AC = OO' = 13\text{cm}, \quad BC = 8 - 3 = 5\text{cm}$$

$$\text{三平方の定理より, } AB^2 + BC^2 = AC^2$$

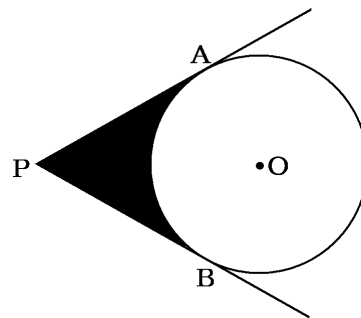
$$AB^2 + 5^2 = 13^2, \quad AB^2 = 169 - 25 = 144 = 12^2$$

よって、 $AB = 12\text{cm}$



[問題 3]

右の図で、円Oの半径は1cm, $\angle APB=60^\circ$ であるとき、影をつけた部分の面積を求めよ。



[解答欄]

$$\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

[解説]

$\angle APB=60^\circ$ で OP は $\angle APB$ を二等分するので、
 $\angle APO=30^\circ$ また、 $\angle OAP=90^\circ$
 よって、 $\triangle APO$ は 30° 60° 90° の直角三角形なので、

$$OA : AP = 1 : \sqrt{3}, \quad OA=1 \text{ なので } AP = \sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{ゆえに}(\triangle OAP \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{同様に}(\triangle OBP \text{ の面積}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

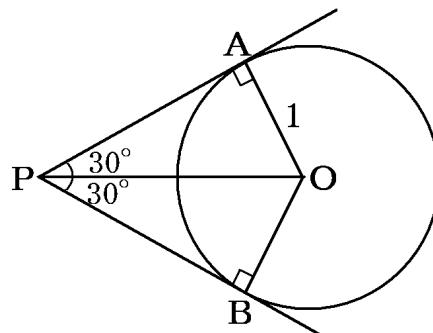
$$\text{よって、(四角形 OAPB の面積)} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)} \cdots \textcircled{1}$$

次に、扇形 OAB について、

$$\angle AOP = \angle BOP = 60^\circ \text{ なので、中心角 } \angle AOB = 120^\circ$$

$$\text{ゆえに(扇形 OAB の面積)} = \pi \times 1^2 \times \frac{120}{360} = \frac{\pi}{3} \text{ (cm}^2\text{)} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より、(影をつけた部分の面積)} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$



[問題 4]

AD // BC である台形 ABCD に、半径 3cm の円 O が内接している。円 O と辺 AB, BC, CD, DA との接点をそれぞれ、P, Q, R, S とする。

OB=6cm のとき、次の問いに答えなさい。

- (1) $\angle PBQ$ は何度ですか。
- (2) AB の長さを求めなさい。

[解答欄]

(1) 60°	(2) $4\sqrt{3}$ cm
----------------	--------------------

[解説]

(1) 点 Q は接点なので $OQ \perp BC$

直角三角形 OBQ で、 $OB : OQ = 6 : 3 = 2 : 1$ なので

$\triangle OBQ$ は 30° 60° 90° の直角三角形になる。

したがって、 $\angle OBQ = 30^\circ$ になる。

$\angle OBP = \angle OBQ$ なので、 $\angle PBQ = 60^\circ$

(2) $\triangle OBP$ は 30° 60° 90° の直角三角形なので、

$$PB : PO = \sqrt{3} : 1, \quad PB : 3 = \sqrt{3} : 1$$

比の外項の積は内項の積と等しいので、

$$PB \times 1 = 3 \times \sqrt{3}, \quad PB = 3\sqrt{3} \text{ (cm)} \cdots \textcircled{1}$$

AD // BC なので

$$\angle BAD = 180^\circ - \angle PBQ = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\angle PAO = \frac{1}{2} \angle BAD = 60^\circ$$

$\angle APO = 90^\circ$ なので、 $\triangle APO$ は 30° 60° 90° の直角三角形になる。

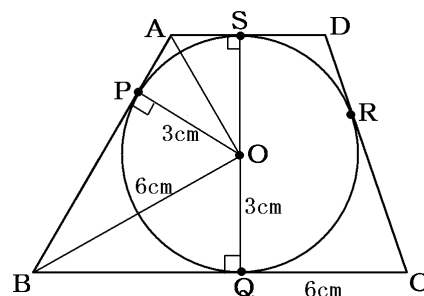
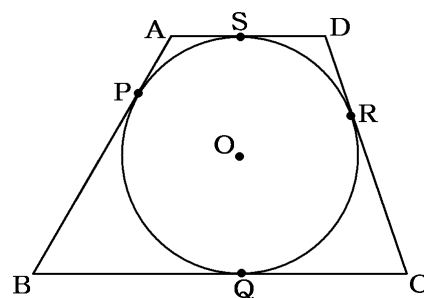
$$\text{ゆえに、} AP : PO = 1 : \sqrt{3}, \quad AP : 3 = 1 : \sqrt{3}$$

比の外項の積は内項の積と等しいので、

$$AP \times \sqrt{3} = 3 \times 1$$

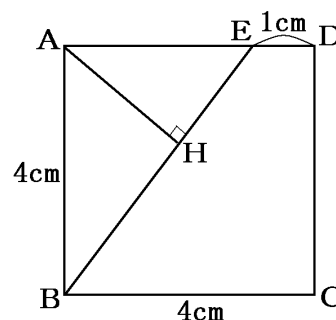
$$\text{よって、} AP = 3 \div \sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ (cm)} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より、} AB = 3\sqrt{3} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}$$



[問題 5]

右の図のように、1 辺の長さが 4cm の正方形 ABCD があり、AD 上に $DE=1\text{cm}$ となる点 E をとります。A から BE に垂線をひき、BE との交点を H とするとき、EH の長さを求めなさい。



[解答欄]

$$\frac{9}{5}\text{cm}$$

[解説]

$\triangle AEH$ と $\triangle BEA$ において、

$$\angle AHE = \angle BAE = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

$\angle AEH + \angle EAH = 90^\circ$, $\angle AEH + \angle ABE = 90^\circ$ なので、

$$\angle EAH = \angle ABE \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より 2 角が等しいので、 $\triangle AEH \sim \triangle BEA$

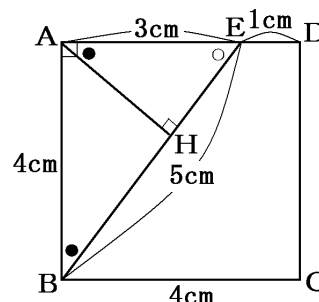
相似な三角形の対応する辺の比は等しいので、

$$AE : BE = EH : EA \cdots \textcircled{3}$$

$\triangle BEA$ は直角三角形なので、三平方の定理より、 $BE^2 = 4^2 + 3^2 = 25$ で $BE = 5$

$$\textcircled{3} \text{より、} 3 : 5 = EH : 3$$

内項の積は外項の積に等しいので、 $5 \times EH = 3 \times 3$ よって、 $EH = 3 \times 3 \div 5 = \frac{9}{5}(\text{cm})$



[問題 6]

右の図で、 $\triangle ABC$ は $\angle A = 90^\circ$ の直角二等辺三角形で、

D は辺 BC の中点である。また、E、F は辺 AC 上の点で、

$AE = EF = FC$ である。

$AB = 6\text{cm}$ のとき、線分 DF の長さを求めなさい。

[解答欄]

$$\sqrt{10}\text{ cm}$$

[解説]

$AC = AB = 6\text{cm}$ で、 $AE = EF = FC$ なので、

$$AE = EF = FC = 2\text{cm}$$

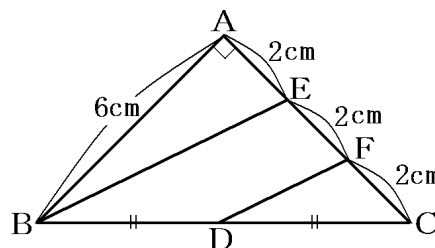
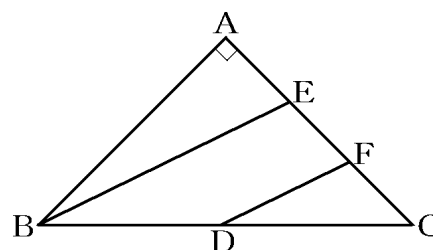
$\triangle ABE$ は直角三角形なので、三平方の定理より、

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 = 36 + 4 = 40$$

$$\text{よって、} BE = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\text{ cm}$$

次に、 $\triangle CBE$ で D は CB の中点で、F は CE の中点なので、中点連結定理より、

$$DF = \frac{1}{2} BE \quad \text{よって、} DF = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} = \sqrt{10}\text{ cm}$$



[問題 7]

AB=6cm, BC=8cm の長方形 ABCD を右の図のように、頂点 C が辺 AD の中点 M と重なるように折る。このとき、DF の長さを求めなさい。

[解答欄]

$$\frac{5}{3}\text{cm}$$

[解説]

DF = x cm とおくと、FC = $6 - x$ (cm)

EF を折り目として FC が FM に重なるので、

MF = FC, ゆえに MF = $6 - x$ (cm)

M は AD の中点なので MD = $8 \div 2 = 4$ (cm)

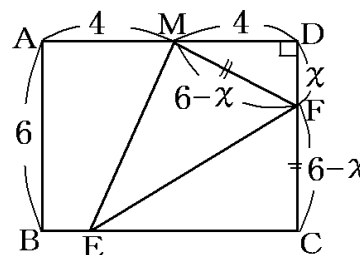
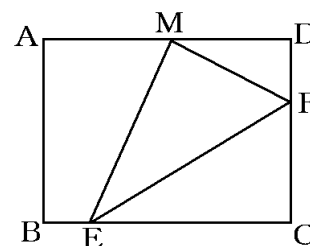
△FDM は直角三角形なので、三平方の定理より

$$FD^2 + DM^2 = FM^2$$

$$\text{ゆえに } x^2 + 16 = (6 - x)^2$$

$$x^2 + 16 = x^2 - 12x + 36, \quad 12x = 20$$

$$x = 20 \div 12 = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \text{ (cm)}$$



[問題 8]

図のように、AB=2cm, AD=3cm の長方形 ABCD を辺 BC が直線 l 上にくるようにおく。また、点 P は l 上を動く点とする。2 つの線分 AP, PD の長さの和 AP+PD が最小となるときの AP+PD の長さは何 cm か。

[解答欄]

$$5\text{cm}$$

[解説]

右図のように l について D と対称な点 E をとる。

A と E を結んだ直線が l と交わる点を P_0 とすると、 P_0 が AP+PD を最小にする点になる。まず、その理由を説明しよう。

$$AP_0 + P_0D = AP_0 + P_0E = AE$$

$$l \text{ 上に点 } P_1 \text{ をとると、} AP_1 + P_1D = AP_1 + P_1E$$

三角形 AP_1E で、1 辺は他の 2 辺の和よりも小さいので、

$$AE < AP_1 + P_1E \text{ となるので、} AP_0 + P_0D < AP_1 + P_1D$$

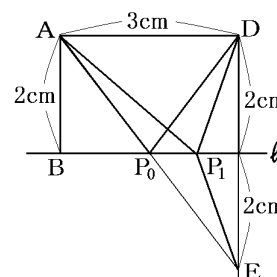
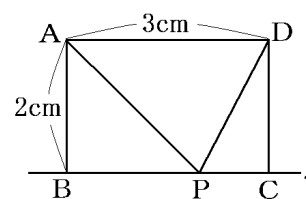
したがって、P が P_0 の位置にあるとき、P が l 上の他の位置にあるときより AP+PD は小さくなる。

すなわち、P が P_0 の位置にあるとき、AP+PD は最小になる。

次に、直角三角形 AED において、三平方の定理より、

$$AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ (cm)}$$

$$AP_0 + P_0D = AP_0 + P_0E = AE = 5 \text{ (cm)} \text{ である。}$$



[問題 9]

直線 $y = x$ 上を動く点 P がある。2 点 $A(4, 7)$, $B(-2, 1)$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $AP + BP$ のもっとも小さくなるときの値を求めよ。

(2) (1)のときの点 P の座標を求めよ。

[解答欄]

(1) $3\sqrt{10}$	(2) $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$
------------------	---

[解説]

(1) 右図のように、 $y = x$ と対称な位置に A' をとる。

B と A' を結んだ直線が $y = x$ と交わる点が $AP + BP$ を最小にする点 P である。

$y = x$ について、 $A(4, 7)$ と対称な点 A' の座標は、 A の x 座標と y 座標を反対にした、 $A'(7, 4)$ である。

このとき、 $AP + BP = A'P + BP = A'B$ である。

2 点 $A'(7, 4)$ と $B(-2, 1)$ の距離は

$$A'B = \sqrt{(7 - (-2))^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{81 + 9} = \sqrt{90} = \sqrt{9 \times 10} = 3\sqrt{10} \text{ である。}$$

(2) まず、 $A'B$ の直線の式を $y = ax + b$ とおく。

$y = ax + b$ は $A'(7, 4)$ を通るので、 $y = ax + b$ に $x = 7$, $y = 4$ を代入して、

$$4 = 7a + b, 7a + b = 4 \cdots \textcircled{1}$$

$y = ax + b$ は $B(-2, 1)$ を通るので、 $y = ax + b$ に $x = -2$, $y = 1$ を代入して、

$$1 = -2a + b, -2a + b = 1 \cdots \textcircled{2}$$

① - ② より、

$$7a + b - (-2a + b) = 4 - 1, 7a + b + 2a - b = 3, 9a = 3, a = 3 \div 9, a = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$a = \frac{1}{3} \text{ を } \textcircled{2} \text{ に代入すると, } -2 \times \frac{1}{3} + b = 1, b = 1 + \frac{2}{3}, b = \frac{5}{3}$$

よって $A'B$ の直線の式は、 $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \cdots \textcircled{3}$ となる。

$y = x \cdots \textcircled{4}$ と ③ の交点を求めるために、③、④を連立方程式として解く。

$$\textcircled{4} \text{ を } \textcircled{3} \text{ に代入すると, } x = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}, 3x = x + 5, 2x = 5, x = \frac{5}{2}$$

$$\textcircled{4} \text{ に } x = \frac{5}{2} \text{ を代入すると, } y = \frac{5}{2}$$

よって、点 P の座標は、 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ となる。

