

第 15 章	数学(3 年)	名前:	日 付	No.01
	三平方と立体			

[問題 1]

右図のような直方体の対角線の長さを求めなさい。

[解答欄]

$$3\sqrt{5} \text{ cm}$$

[解説]

<Point> 2 点を通る平面で立体を切る→切断面で考える

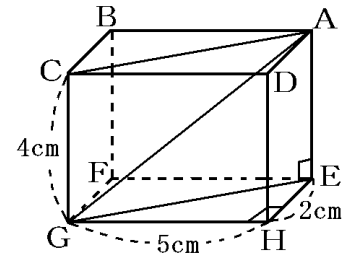
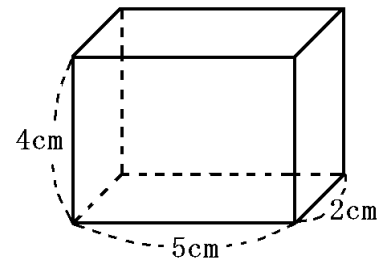
まず、底面の直角三角形 EGH について、三平方の定理より、

$$EG^2 = GH^2 + EH^2 = 5^2 + 2^2 = 29$$

次に、直角三角形 AEG について、

$$AG^2 = AE^2 + EG^2 = 4^2 + 29 = 45$$

$$\text{ゆえに } AG = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5} \text{ (cm)}$$



[問題 2]

次の図のように、1 辺の長さが 4cm の立方体 ABCD-EFGH があり、辺 AD の中点を M とする。MF の長さを求めよ。

[解答欄]

$$6\text{cm}$$

[解説]

<Point> 2 点を通る平面で立体を切る→切断面で考える

右図のように、M と F を通り底面に垂直な断面 MBFP を考える。

このとき、 $\angle MPF = 90^\circ$ で P は EH の中点になる。

MP=4cm なので、FP の長さがわかれば、三平方の定理より、

MF の長さが計算できる。

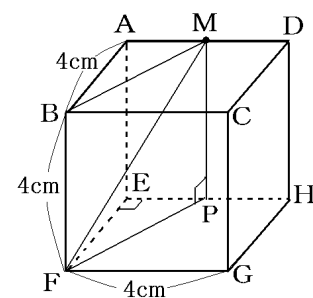
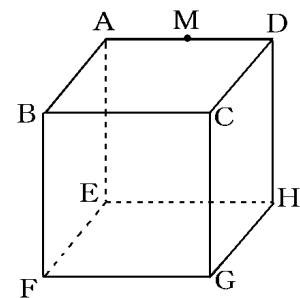
そこで、直角三角形 FPE に注目する。

EF=4cm, P は EH の中点なので、EP=2cm

$$\text{三平方の定理より、} FP = \sqrt{EF^2 + EP^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

次に、 $\triangle MFP$ で、三平方の定理より、

$$MF = \sqrt{FP^2 + PM^2} = \sqrt{20 + 4^2} = \sqrt{36} = 6 \text{ (cm)}$$



[問題 3]

次の図の立体は底面が直角二等辺三角形で、側面はすべて長方形の三角柱であり、 $\angle ABC=90^\circ$ 、 $AB=BC=4\text{cm}$ 、 $AD=5\text{cm}$ とする。また、辺 EF の中点を N とする。 A 、 N を結ぶとき、線分 AN の長さを求めよ。

[解答欄]

$$3\sqrt{5}\text{cm}$$

[解説]

<Point> 2 点を通る平面で立体を切る→切断面で考える

右の図 1 のように、 A と N を通り底面に垂直な断面 $ADNM$ を考える。

AD は底面に垂直なので、 $\angle ADN=90^\circ$ である。

したがって、直角三角形 AND で、

$AD=5\text{cm}$ なので、あと DN の長さがわかれば、三平方の定理より

AN の長さを求めることができる。

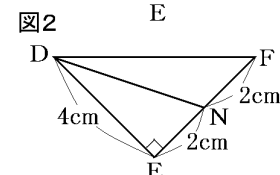
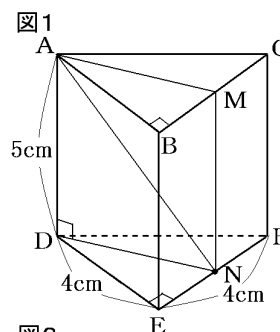
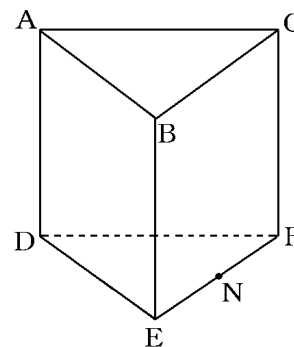
そこで、図 2 のように底面 DFE を平面に書き表してみる。

図 2 の直角三角形 DNE で、三平方の定理より、

$$DN = \sqrt{DE^2 + EN^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} \text{ (cm)}$$

図 1 の直角三角形 AND で、三平方の定理より、

$$AN = \sqrt{AD^2 + DN^2} = \sqrt{25 + 20} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5} \text{ (cm)}$$



[問題 4]

次の図の立体は、8 つの点 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G 、 H を頂点とする直方体であり、 $AB=4\text{cm}$ 、 $AD=6\text{cm}$ 、 $AE=8\text{cm}$ である。辺 AE 、 CG 上にそれぞれ点 P 、 Q を、 $AP=2\text{cm}$ 、 $CQ=6\text{cm}$ となるようにとるとき、 PQ の長さを求めよ。

[解答欄]

$$2\sqrt{17}\text{cm}$$

[解説]

<Point> 2 点を通る平面で立体を切る

→切断面で考える

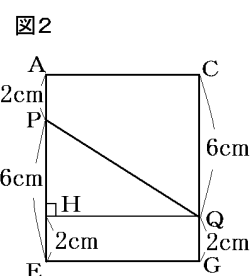
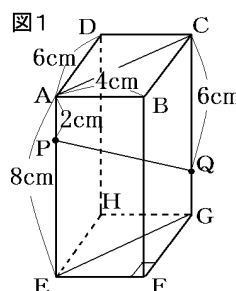
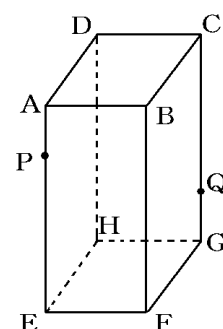
右図のように、2 点 P 、 Q を通り底面に垂直な断面 $AEGC$ を考える。

図 2 は切断面 $AEGC$ の部分を平面にしたものである。 Q から EG と平行に QH の線分を引くと、 $\angle PHQ=90^\circ$ になる。

$\triangle PQH$ で、 $PH=6-2=4\text{cm}$ なので、

$QH(=EG)$ の長さがわかれば、三平方の定理より PQ の長さを求めることができる。

そこで、図 1 の直角三角形 EGF に注目する。 $EF=4\text{cm}$ 、 $GF=6\text{cm}$ なので、三平方の定理より、 $EG=$



$$\sqrt{EF^2 + GF^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} \text{ (cm)} \quad \text{よって, } QH = EG = \sqrt{52}$$

図2の直角三角形PQHで、三平方の定理より、

$$PQ = \sqrt{PH^2 + QH^2} = \sqrt{4^2 + 52} = \sqrt{68} = \sqrt{4 \times 17} = 2\sqrt{17} \text{ (cm)}$$

[問題 5]

右の図のように、 $AB=3\text{cm}$ 、 $BC=2\text{cm}$ 、 $BF=1\text{cm}$ の直方体がある。
この直方体の対角線 AG に頂点 D から垂線 DP を下ろす。このとき、
 DP の長さを求めなさい。

[解答欄]

$$\frac{2\sqrt{35}}{7} \text{ cm}$$

[解説]

<Point> $AD \perp$ 面 $CGHD$

$\triangle AGD$ の面積 $\rightarrow$ 高さ DP

DG を結び、 $\triangle AGD$ に注目する。

図の立体は直方体なので、

$AD \perp$ 面 $CGHD$

GD は面 $CGHD$ 上にあるので、

$AD \perp GD$ となる。

したがって、 $\triangle AGD$ は直角三角形になる。

そこで、右の図2のように、 $\triangle AGD$ を取り出して考える。まず、 $\triangle AGD$ の3辺を求める。

$AD=BC=2\text{cm}$ GD を求めるために、図1の直角三角形 GDH で、三平方の定理より、

$$GD = \sqrt{GH^2 + DH^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \text{ (cm)}$$

図2の直角三角形 AGD で、

$$AG = \sqrt{AD^2 + GD^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{10})^2} = \sqrt{14} \text{ (cm)}$$

$\triangle AGD$ で、面積を使って DP の長さを求める。

AD を底辺にすると、 GD が高さになるので、

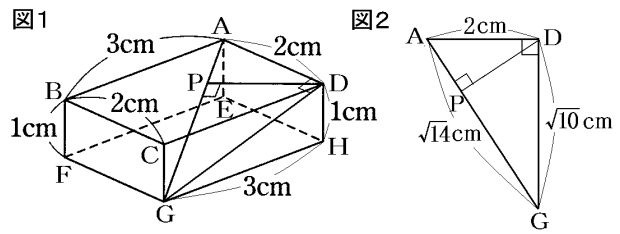
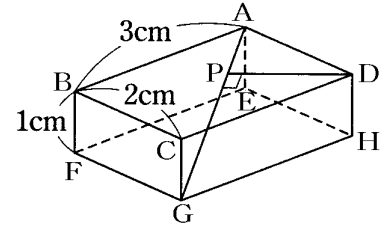
$$(\triangle AGD \text{ の面積}) = (\text{底辺 } AD) \times (\text{高さ } GD) \div 2 = 2 \times \sqrt{10} \div 2 = \sqrt{10} \text{ (cm}^2\text{)} \cdots \textcircled{1}$$

AG を底辺とすると、 DP が高さになるので、

$$(\triangle AGD \text{ の面積}) = (\text{底辺 } AG) \times (\text{高さ } DP) \div 2 = \sqrt{14} \times DP \div 2 = \frac{\sqrt{14}}{2} DP \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } \frac{\sqrt{14}}{2} DP = \sqrt{10}$$

$$\text{よって, } DP = \sqrt{10} \times \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{10} \times \sqrt{14}}{\sqrt{14} \times \sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{140}}{14} = \frac{4\sqrt{35}}{14} = \frac{2\sqrt{35}}{7} \text{ (cm)}$$



[問題 6]

右の図のように、1 辺の長さが 4cm の立方体 $ABCD-EFGH$ がある。
対角線 BH 上に $BP : PH = 3 : 1$ となる点 P をとる。

$\triangle PBE$ の面積を求めよ。

[解答欄]

$$6\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

[解説]

<Point> $HE \perp BE$

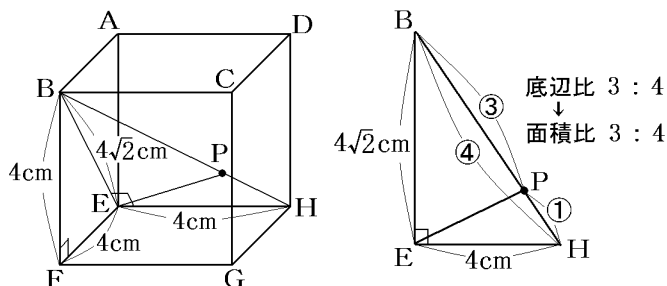
まず、 $\triangle BHE$ の面積を求める。

$HE \perp$ 面 $ABFE$ なので、 $HE \perp BE$

よって、 $\triangle BHE$ は直角三角形である。

直角三角形 BEF で、

三平方の定理より、



$$BE = \sqrt{BF^2 + EF^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{4^2 \times 2} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$\text{よって、} (\triangle BEH \text{ の面積}) = (\text{底辺 } EH) \times (\text{高さ } BE) \div 2 = 4 \times 4\sqrt{2} \div 2 = 8\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$\triangle PBE$ の底辺を BP 、 $\triangle BEH$ の底辺を BH とすると高さは共通なので、

面積は底辺の比 $BP : BH = 3 : 4$ になる。

$$\text{したがって、} (\triangle PBE \text{ の面積}) = (\triangle BEH \text{ の面積}) \times \frac{3}{4} = 8\sqrt{2} \times \frac{3}{4} = 6\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

[問題 7]

次の図は、直方体 $ABCD-EFGH$ で、 $AD=6\text{cm}$ 、 $AE=4\text{cm}$ 、 $EF=3\text{cm}$ である。 AB 上に点 P をとって、 $EP+PC$ が最小になるようにした。

(1) $EP+PC$ の長さを求めよ。

(2) AP の長さを求めよ。

[解答欄]

(1) $\sqrt{109}\text{ cm}$	(2) 1.2cm
----------------------------	--------------------

[解説]

<Point> 最短距離の線が通る部分の展開図をかく

右図で、 E と C を結んだ線 EPC が最短距離になるが、その理由をまず説明する。

AB 上に P 以外の点 Q をとる。

$\triangle QEC$ で、三角形の 2 辺の和は他の 1 辺より長いので、

$EQ+QC>EC$ で、 $EQ+QC>EP+PC$ となる。

点 Q が BC 上のどこにあっても、この不等式は成り立つ。

したがって、 $EP+PC$ が最短距離になる。

(1) $\triangle CEF$ で、三平方の定理より、

$$EC = \sqrt{EF^2 + CF^2} = \sqrt{3^2 + (4+6)^2} = \sqrt{9+100} = \sqrt{109} \text{ (cm)}$$

(2) $\triangle ECD$ で $AP \parallel DC$ なので、

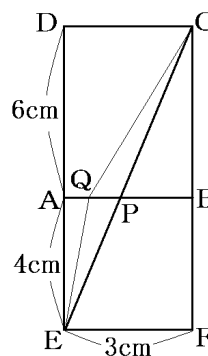
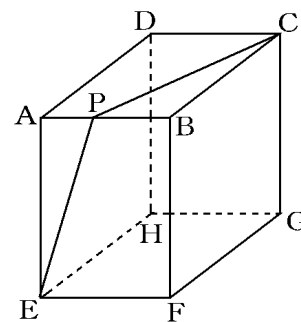
$$AP : DC = EA : ED$$

$$AP : 3 = 4 : 10$$

比の外項の積は内項の積に等しいので、

$$AP \times 10 = 3 \times 4$$

$$AP = 12 \div 10 = 1.2 \text{ (cm)}$$



[問題 8]

図のような、底面が $DE=EF=6\text{m}$ の直角二等辺三角形で、高さが 6cm の三角柱がある。辺 AC の中点を M とし、辺 AB 上に、 $MP+PE$ の長さがもっとも短くなるように点 P をとる。このとき、 $MP+PE$ の長さを求めなさい。

[解答欄]

$3\sqrt{10}\text{ cm}$

[解説]

<Point> 最短距離の線が通る部分の展開図をかく

右図のような展開図の直角三角形 MEN において、

MN と NE がわかれば、三平方の定理より ME の長さを求めることができる。

M は AC の中点なので、 N も DE の中点になり、

$$NE = 6 \div 2 = 3(\text{cm})$$

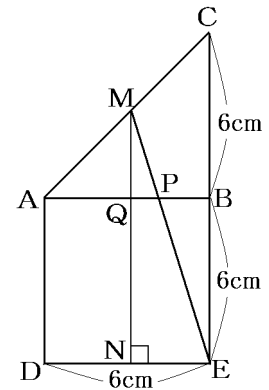
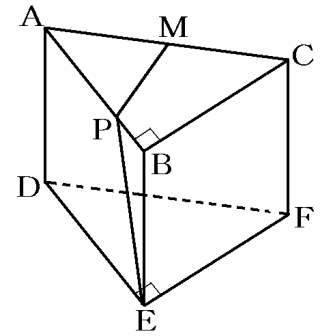
$$MQ = BC \div 2 = 6 \div 2 = 3(\text{cm})$$

$$\text{したがって、} MN = 3 + 6 = 9(\text{cm})$$

直角三角形 MEN で、三平方の定理より、

$$ME = \sqrt{MN^2 + NE^2} = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{81 + 9} = \sqrt{90}$$

$$= \sqrt{9 \times 10} = 3\sqrt{10} (\text{cm})$$



[問題 9]

右の図のように O を頂点とし、底面の半径が 1cm 、高さが $2\sqrt{2}\text{cm}$ の円すいがある。点 C を底面の円周上の点とする。点 C を出発し円すいの側面を 1 周してもとの点に戻ってくる最短経路を考える。このとき、最短経路の長さを求めなさい。

[解答欄]

$3\sqrt{3}\text{cm}$

[解説]

<Point> 最短距離の線が通る部分の展開図をかく

展開図をかくと、側面はおうぎ形になる。まず、そのおうぎ形の半径 OC を求める。

右図の直角三角形 OCA で、三平方の定理より、

$$OC = \sqrt{OA^2 + CA^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3(\text{cm})$$

次に、右下図のように展開図をかく。

図の展開図において、 CC' が最短経路の長さになる。

そこで、まず、この円すいを展開したときの側面のおうぎ形の中心角を求める。

底面の円の円周は、 $2 \times 1 \times \pi = 2\pi(\text{cm})$ なので、弧 CC' の長さも $2\pi(\text{cm})$ になる。

側面の円 O の円周は、 $2 \times 3 \times \pi = 6\pi(\text{cm})$ である。

したがって、中心角の大きさは、

$$360^\circ \times \frac{2\pi}{6\pi} = 120^\circ \text{ になる。}$$

図のように、 O から CC' に垂線 OB をおろすと、 OB は $\angle COC'$ を二等分するので、

$\angle BOC = 60^\circ$ となる。

$\triangle BOC$ は $30^\circ \ 60^\circ \ 90^\circ$ の直角三角形なので、 $BC : OC = \sqrt{3} : 2$

よって、 $BC : 3 = \sqrt{3} : 2$

比の外項の積は内項の積に等しいので、

$$BC \times 2 = 3 \times \sqrt{3} \quad \text{よって、} BC = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ゆえに } CC' = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 2 = 3\sqrt{3}(\text{cm})$$

