

第 15 章	数学(3 年)	名前:	日 付	No.02
	三平方と立体			

[問題 1]

図 1 は、円すいの展開図である。側面の展開図のおうぎ形は、半径 6cm、中心角 180° になっている。このとき、次の(1)、(2)の問いに答えなさい。

- (1) 底面の円の半径を求めなさい。
- (2) 図1の展開図を組み立てた円すいの頂点をO、底面の円の直径をAB、OBの中点をMとする。図2のように、側面上にAとMを最短の長さで結ぶ線をひくとき、その線の長さを求めなさい。

図1

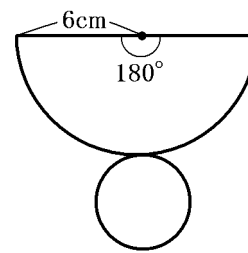
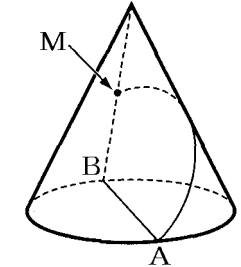


図2



[解答欄]

(1) 3cm	(2) $3\sqrt{5}$ cm
---------	--------------------

[解説]

(1) 図 1 の側面部分のおうぎ形の半円周の長さと底面の円の円周の長さは等しい。

したがって、底面の半径を x cm とすると、

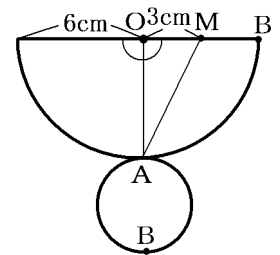
$$2\pi \times x = 6 \times 2 \times \pi \div 2, \text{ よって, } x = 3(\text{cm})$$

(2) 点 A が右図のような位置にあるとき、AB は底面の円を半周した位置にあるので、B と M の位置は右図のようになる。

A と M を最短の長さで結ぶ線は右図の AM になる。

直角三角形 AMO で、三平方の定理より、

$$AM = \sqrt{OA^2 + OM^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5} (\text{cm})$$



[問題 2]

右の図のように底面が 1 辺 6cm の正方形で、他の辺が 9cm の正四角すいがある。次の問いに答えなさい。

- (1) 高さ OH の長さを求めなさい。
 (2) 体積を求めなさい。

[解答欄]

(1) $3\sqrt{7}$ cm	(2) $36\sqrt{7}$ cm ³
--------------------	----------------------------------

(1) まず、直角三角形 ABC について、

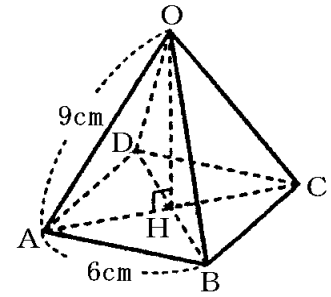
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

H は AC の中点なので、 $AH = 6\sqrt{2} \div 2 = 3\sqrt{2}$ (cm)

次に直角三角形 OAH について、三平方の定理より、

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{9^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{81 - 18} = \sqrt{63} = \sqrt{9 \times 7} = 3\sqrt{7} \text{ (cm)}$$

$$(2) \text{ (体積)} = \frac{1}{3} \times (\text{底面積 } ABCD) \times (\text{高さ } OH) = \frac{1}{3} \times 6^2 \times 3\sqrt{7} = 36\sqrt{7} \text{ (cm}^3\text{)}$$



[問題 3]

底面の半径が 3cm、母線の長さが 4cm の円すいの高さを求めなさい。

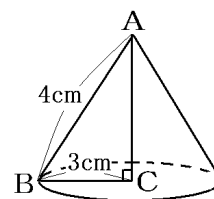
[解答欄]

$\sqrt{7}$ cm

[解説]

右図の直角三角形 ABC について、三平方の定理より、

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7} \text{ (cm)}$$



[問題 4]

右の図のおうぎ形を側面の展開図とする円すいについて次の長さを求めなさい。

(1) 底面の半径

(2) 円すいの高さ

[解答欄]

(1) 5cm	(2) $10\sqrt{2}$ cm
---------	---------------------

[解説]

(1) 右図で、底面の円 H の円周の長さと弧 AA'の長さは等しい。

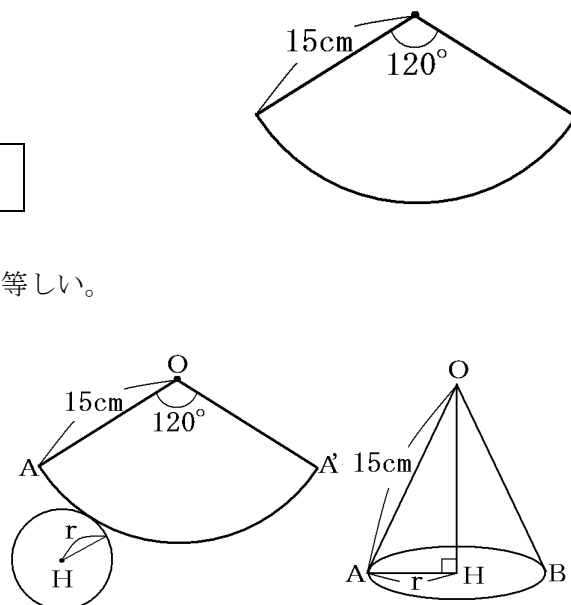
$$(\text{弧 AA'}) = 2 \times \pi \times 15 \times \frac{120}{360} = 10\pi \text{ (cm)}$$

底面の円 H の半径を rcm とすると、

$$2 \times \pi \times r = 10\pi \text{ なので、} r = 5\text{cm}$$

(2) 図の $\triangle OAH$ で三平方の定理より、

$$\begin{aligned} OH &= \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{15^2 - 5^2} \\ &= \sqrt{225 - 25} = \sqrt{200} = \sqrt{100 \times 2} = 10\sqrt{2} \text{ (cm)} \end{aligned}$$



[問題 5]

次の図のような三角柱がある。 $\triangle DEF$ は二等辺三角形で、 $DE = DF = 7\text{cm}$, $EF = 4\text{cm}$ である。また、この三角柱の高さは $AD = 6\text{cm}$ である。

辺 BE, CF の中点をそれぞれ G, H とし、3 点 A, G, H を通る平面で切って、この三角柱を 2 つに分けると、点 B を含む立体の体積を求めよ。

[解答欄]

$12\sqrt{5}\text{cm}^3$

[解説]

右図のように、BC の中点を M とすると、

$\triangle ABC$ は $AB = AC$ の二等辺三角形なので、 $AM \perp BC$ となる。

ところで、三角柱の底面 ABC と側面 BEFC は垂直なので、

AM は面 BEFC に垂直になる。

したがって、四角すい A-BGHC の底面を BGHC とすると、

高さは AM になる。

この四角すいの体積を求めるために、まず、AM を求める。

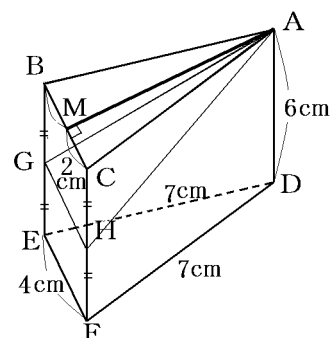
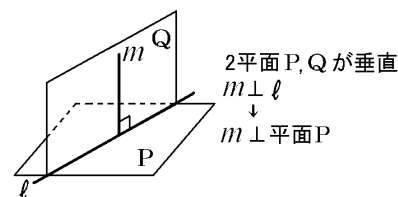
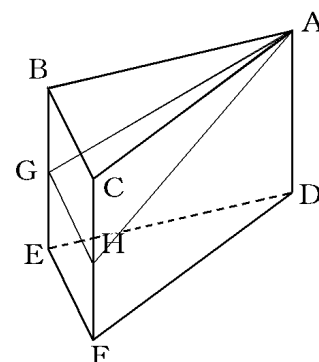
$$CM = CB \div 2 = EF \div 2 = 4 \div 2 = 2\text{(cm)}, \quad AC = DF = 7\text{(cm)}$$

直角三角形 ACM で、

三平方の定理より、

$$AM = \sqrt{AC^2 - CM^2} = \sqrt{7^2 - 2^2} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5} \text{ (cm)}$$

次に、(底面 BGHC の面積) $= BC \times CH = 4 \times 3 = 12\text{(cm}^2\text{)}$



よって、(四角すい A-BGHC の体積) $= \frac{1}{3} \times (\text{底面積 BCHG}) \times (\text{高さ AM})$

$$= \frac{1}{3} \times 12 \times 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5} \text{ (cm}^3\text{)}$$

[問題 6]

次の図のような三角すい ABCD があり、
 $\angle ABC = \angle ABD = \angle BCD = 90^\circ$, $AB = 6\text{cm}$,
 $BC = 5\text{cm}$, $CD = 4\text{cm}$ である。また、点 P は辺 AC の中点である。
 4 点 P, B, C, D を頂点とする三角すいの体積を求めよ。

[解答欄]

10cm³

[解説]

高さを求めるのがポイントである。

P から線分 BC に垂線 PM を引くと、

$\angle PMC = \angle ABC = 90^\circ$ で、同位角が等しいので $PM \parallel AB$

ところで、 $AB \perp BC$, $AB \perp BD$ なので、 $AB \perp \text{面 BCD}$ になる。

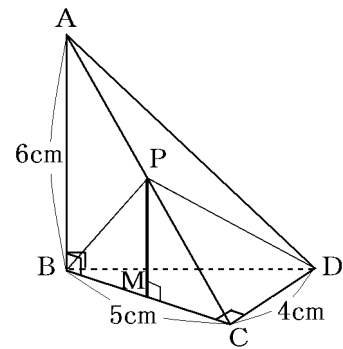
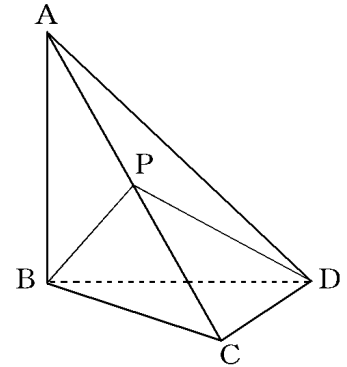
よって、 $PM \perp \text{面 BCD}$ となる。

したがって、 $\triangle BCD$ を底面としたとき、高さは PM になる。

点 P は辺 AC の中点なので、 $PM = AB \div 2 = 6 \div 2 = 3\text{(cm)}$

($\triangle BCD$ の面積) $= BC \times CD \div 2 = 5 \times 4 \div 2 = 10\text{(cm}^2\text{)}$

よって、(三角すい P-BCD の体積) $= \frac{1}{3} \times (\triangle BCD \text{ の面積}) \times PM = \frac{1}{3} \times 10 \times 3 = 10\text{(cm}^3\text{)}$



[問題 7]

右の図は、1 辺の長さが 6cm の立方体 $ABCD-EFGH$ で、 A, B, C, F を頂点とする三角すいについて考えたものである。これについて、次の各問いに答えよ。

- (1) この立体の体積を求めよ。
- (2) 頂点 B から、面 ACF におろした垂線の長さ、すなわち面 ACF を底面としたときの点 B の高さを求めよ。

[解答欄]

(1) 36cm^3	(2) $2\sqrt{3}\text{cm}$
---------------------	--------------------------

[解説]

<Point> 体積・底面積→高さ

$$(1) (\text{すいの体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$$

$$\triangle ABC \text{ を底面とすると, } (\text{体積}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times 6 = 36\text{cm}^3$$

(2) まず、正三角形 AFC の面積を計算する。直角三角形 ABF で、三平方の定理より、

$$AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2}\text{ (cm)}$$

同様にして、 AC, CF の長さも $6\sqrt{2}\text{ cm}$ 右図の $\triangle AFH$ は $30^\circ \ 60^\circ \ 90^\circ$ の直角三角形なので、

$$FH : AF : AH = 1 : 2 : \sqrt{3}$$

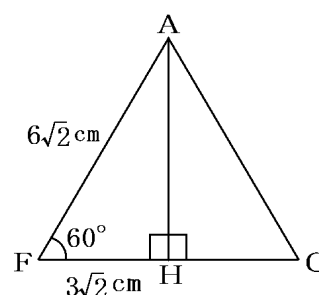
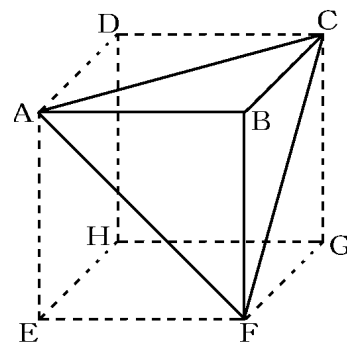
$$AF = 6\sqrt{2}\text{ cm} \text{ なので, } FH = 3\sqrt{2}\text{ cm, } AH = 3\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{6}\text{ (cm)}$$

$$\text{ゆえに} (\triangle ACF \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times FC \times AH = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 3\sqrt{6} = 9\sqrt{12} = 18\sqrt{3}\text{ (cm}^2\text{)}$$

点 B の高さを $x\text{ cm}$ とすると、 A, B, C, F を頂点とする三角すいの体積について

$$(\text{体積}) = \frac{1}{3} \times (\triangle ACF \text{ の面積}) \times (\text{高さ } x) = 36$$

$$\frac{1}{3} \times 18\sqrt{3} \times x = 36, \quad 6\sqrt{3}x = 36, \quad \sqrt{3}x = 6, \quad x = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

ゆえに高さは $2\sqrt{3}\text{ cm}$ 

[問題 8]

次の図の三角すいにおいて、CD は底面 ABD に垂直である。

AD=CD=6cm, DB=8cm, $\angle ADB=90^\circ$ のとき、D から平面 ABC におろした垂線の長さを求めよ。

[解答欄]

$$\frac{24\sqrt{41}}{41} \text{ cm}$$

[解説]

<Point> 体積・底面積→高さ

まず、 $\triangle ABD$ を底面、CD を高さとして体積を求める。

$$\begin{aligned} (\text{体積}) &= \frac{1}{3} \times (\triangle ABD \text{ の面積}) \times (\text{高さ CD}) \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 8 \right) \times 6 = 48 (\text{cm}^3) \end{aligned}$$

D から平面 ABC におろした垂線の長さを x cm とすると、

$$(\text{体積}) = \frac{1}{3} \times (\triangle ABC \text{ の面積}) \times (\text{高さ } x) = 48 (\text{cm}^3) \cdots \textcircled{1} \text{ となる。}$$

そこで、 $\triangle ABC$ の面積を求める。まず、3 つの直角三角形($\triangle ACD$, $\triangle BCD$, $\triangle ABD$)で、三平方の定理より、

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 \text{ (cm)}$$

$$AB = \sqrt{BD^2 + AD^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 \text{ (cm)}$$

よって、 $\triangle ABC$ は右図のような二等辺三角形になる。

B から CA に垂線 BH を引くと、H は CA の中点となる。

直角三角形 BCH で、三平方の定理より、

$$BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{10^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{100 - 18} = \sqrt{82} \text{ (cm)}$$

$$\begin{aligned} \text{よって、} (\triangle ABC \text{ の面積}) &= AC \times BH \div 2 = 6\sqrt{2} \times \sqrt{82} \div 2 \\ &= 3\sqrt{164} = 3\sqrt{4 \times 41} = 6\sqrt{41} \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

①に、 $(\triangle ABC \text{ の面積}) = 6\sqrt{41} \text{ (cm}^2\text{)}$ を代入すると、

$$\frac{1}{3} \times 6\sqrt{41} \times x = 48, \quad 2\sqrt{41}x = 48, \quad x = \frac{48}{2\sqrt{41}} = \frac{24 \times \sqrt{41}}{\sqrt{41} \times \sqrt{41}} = \frac{24\sqrt{41}}{41} \text{ (cm)}$$

