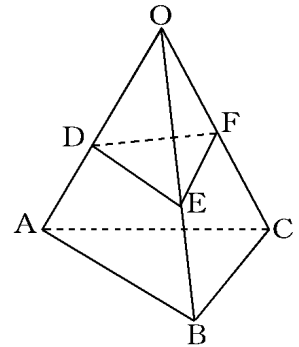


第 15 章	数学(3 年)	名前:	日 付	No.03
	三平方と立体			

[問題 1]

次の図のように、1 辺 6cm、高さが $2\sqrt{6}$ cm の正四面体 OABC があり、辺 OA, OB, OC 上に、OD=4cm, OE=4cm, OF=3cm となるような点 D, E, F をそれぞれとる。このとき四面体 ODEF の体積を求めよ。



[解答欄]

$$4\sqrt{2} \text{ cm}^3$$

[解説]

まず、正四面体 OABC の体積を求める。

図 1 は底面の $\triangle ABC$ である。C から AB に垂線 CH をおろすと、H は AB の中点になる。したがって、AH=3cm である。

直角三角形 ACH で、三平方の定理より、

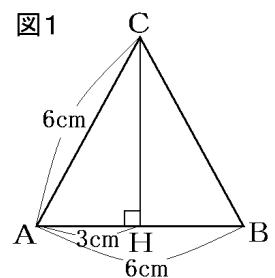
$$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27}$$

$$= \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$\text{したがって、} (\triangle ABC \text{ の面積}) = AB \times CH \div 2 = 6 \times 3\sqrt{3} \div 2 = 9\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$(\text{正四面体 OABC の体積}) = \frac{1}{3} \times (\triangle ABC \text{ の面積}) \times (\text{高さ})$$

$$= \frac{1}{3} \times 9\sqrt{3} \times 2\sqrt{6} = 6\sqrt{18} = 6\sqrt{9 \times 2} = 18\sqrt{2} \text{ (cm}^3\text{)}$$



<Point> 高さが共通な三角すい $\rightarrow$ (体積比) = (底面積の比)

次に、図 2 のように平面 ABF でこの立体を、A-OBF と A-CBF の 2 つの三角すいに分ける。

F は OC の中点なので、底面の三角形 OBF と CBF は面積が同じである。

A から OBC におろした高さは共通なので、この 2 つの立体の体積は等しい。

よって、A-OBF の体積はもとの正四面体の体積の半分で、

$$18\sqrt{2} \div 2 = 9\sqrt{2} \text{ (cm}^3\text{)} \text{ となる。}$$

A-OBF の三角すいは、F を頂点とし $\triangle OAB$ を底面とする三角すい F-OAB と考えることもできる。

明らかに、 $\triangle ODE$ と $\triangle OAB$ 相似であり、相似比は $4:6=2:3$ である。

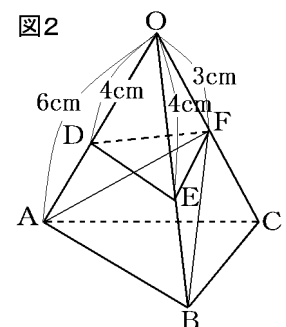
したがって、面積比は、 $2^2:3^2=4:9$ となる。

したがって、 $\triangle ODE$ の面積は $\triangle OAB$ の $\frac{4}{9}$ 倍になる。

F-ODE の三角すいは、F-OAB の三角すいと高さが共通なので、底面積の比は体積比と等しくなる。

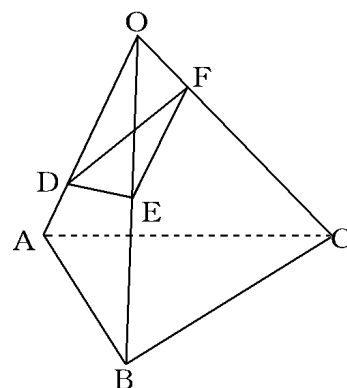
よって、F-ODE の体積は F-OAB の体積の $\frac{4}{9}$ 倍になる。

$$\text{したがって、} (F-ODE \text{ の体積}) = (F-OAB \text{ の体積}) \times \frac{4}{9} = 9\sqrt{2} \times \frac{4}{9} = 4\sqrt{2} \text{ (cm}^3\text{)}$$



[問題 2]

次の図のように、体積が $a \text{ cm}^3$ の正四面体 $O-ABC$ がある。いま、辺 OA を $3:1$ に分ける点を D 、辺 OB の中点を E 、辺 OC を $1:3$ に分ける点を F として、点 D, E, F を通る平面で、この正四面体を切る。このとき、三角すい $O-DEF$ の体積を求めよ。



[解答欄]

$$\frac{3}{32} a \text{ cm}^3$$

[解説]

<Point> 高さが共通な三角すい $\rightarrow$ (体積比) = (底面積の比)

図 1 のように、 $O-ABC$ を平面 FAB で 2 つの三角すい $A-OBF$ と $A-CBF$ に分ける。頂点 A から面 OBC におろした垂線の長さが、この 2 つの三角すいの共通の高さになるので、底面積の比 ($\triangle BOF : \triangle BCF$) は体積比と等しくなる。...①

図 2 のように、 B を頂点とし、 OF, CF を底辺と考えると、 B から CO におろした垂線が共通の高さになるので、面積比は底辺の比に等しくなる。

よって、 $\triangle BOF : \triangle BCF = OF : CF = 1 : 3$...②

①, ②より、 $(A-OBF \text{ の体積}) : (A-CBF \text{ の体積}) = 1 : 3$ となり、

$$(A-OBF \text{ の体積}) = (A-OBC \text{ の体積}) \times \frac{1}{1+3} = a \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} a \text{ (cm}^3\text{)} \dots \text{③}$$

三角すい $A-OBF$ は F を頂点とすると、三角すい $F-OAB$ ととらえることができる。

ここで、三角すい $F-OAB$ を平面 FDE で切断する。

切断してできた三角すい $F-ODE$ と、もとの三角すい $F-OAB$ の高さは、ともに頂点 F から平面 OAB におろした垂線の長さになるので、2 つの三角すいの体積比は、底面積の比 ($\triangle ODE : \triangle OAB$) と等しくなる。...④

右の図 3 を使って、 $\triangle ODE : \triangle OAB$ を求める。

$\triangle EAD$ の面積を S とすると、 $\triangle EAD$ と $\triangle EOD$ は高さが共通で、底辺の比が、 $AD : OD = 1 : 3$ なので、面積比も $1 : 3$ となる。

したがって、 $\triangle EOD$ の面積は $3S$ となる。

次に、 $\triangle ABE$ と $\triangle AOE$ は、 $BE = OE$ なので面積も等しくなる。

よって、 $\triangle ABE = S + 3S = 4S$ となる。

したがって、 $\triangle OAB = 3S + S + 4S = 8S$ となり、

$\triangle ODE : \triangle OAB = 3S : 8S = 3 : 8$ となる。

④より、 $(F-ODE \text{ の体積}) : (F-OAB \text{ の体積}) = 3 : 8$

③より、 $(F-OAB \text{ の体積}) = (A-OBF \text{ の体積}) = \frac{1}{4} a \text{ (cm}^3\text{)} \text{ なので、}$

$$(F-ODE \text{ の体積}) = \frac{1}{4} a \times \frac{3}{8} = \frac{3}{32} a \text{ (cm}^3\text{)}$$

図1

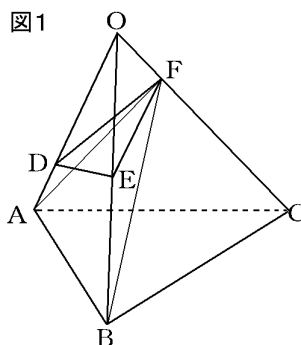


図2

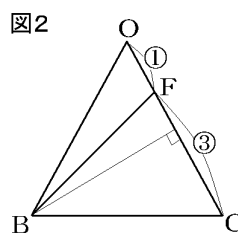
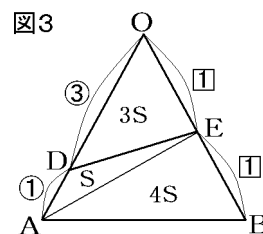


図3



[問題 3]

右の図のような 1 辺の長さが 4cm の正四面体 ABCD がある。辺 AB の中点を M とするとき、 $\triangle MCD$ の面積を求めなさい。(佐賀県)

[解答欄]

$$4\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

[解説]

<Point> 二等辺三角形の高さ：頂点から垂線をおろす。

図 1 で、 $\triangle ABC$ は正三角形で、M は AB の中点なので、 $CM \perp AB$ となる。

$\triangle BCM$ は 30° 60° 90° の直角三角形なので、

$$BM : BC : CM = 1 : 2 : \sqrt{3}$$

$BC = 4\text{cm}$ なので、

$$BM = 2\text{cm}, CM = 2\sqrt{3}\text{cm} \text{ となる。}$$

同様に、 $DM = 2\sqrt{3}\text{cm}$ で、 $DM = CM$

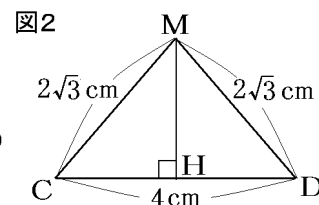
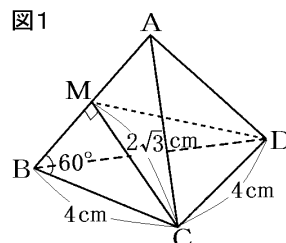
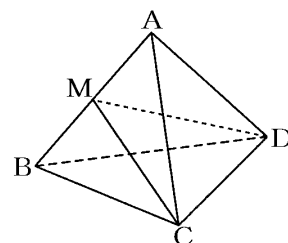
したがって、図 2 の $\triangle MCD$ は二等辺三角形である。

M から辺 CD に垂線 MH をおろすと、H は CD の中点になる。

したがって、 $CH = 2\text{cm}$ 直角三角形 MCH で、三平方の定理より、

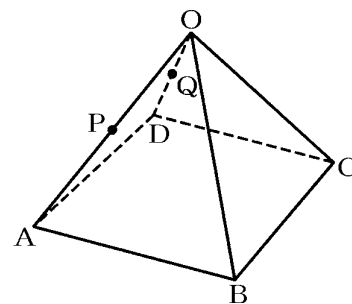
$$MH = \sqrt{MC^2 - CH^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = \sqrt{12 - 4} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$\text{よって、} (\triangle MCD \text{ の面積}) = (\text{底辺 } CD) \times (\text{高さ } MH) \div 2 = 4 \times 2\sqrt{2} \div 2 = 4\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$



[問題 4]

右の図のように、底面が正方形、側面が正三角形で、
 $AB=4\text{cm}$ の正四角すいが $OABCD$ がある。また、辺 OA 、 OD の中点を
 それぞれ P 、 Q とする。このとき、四角形 $PBCQ$ の面積を求めよ。



[解答欄]

$$3\sqrt{11}\text{ cm}^2$$

[解説]

四角形 $PBCQ$ は等脚台形になる。その面積は 4 つの辺の長さがわかれば 図1
 計算できる。

まず、 PQ について図 2 で考える。

P 、 Q はそれぞれ OA 、 OD の中点なので、中点連結定理より、

$$PQ = \frac{1}{2}AD = 2(\text{cm}), PQ \parallel AD \text{ となる。}$$

$AD \parallel BC$ なので、 $PQ \parallel BC$ となる。

次に、 BP について図 3 で考える。

$\triangle OAB$ は正三角形で、 P は OA の中点なので、
 $BP \perp OA$ となる。

直角三角形 ABP で、三平方の定理より、

$$BP = \sqrt{AB^2 - AP^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$$

$$= \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}(\text{cm})$$

CQ もまったく同様にして、 $CQ = 2\sqrt{3}\text{ cm}$ となる。

<Point> 等脚台形の高さ：垂線を 2 つおろす。

台形 $PBCQ$ は右の図 4 のようになる。

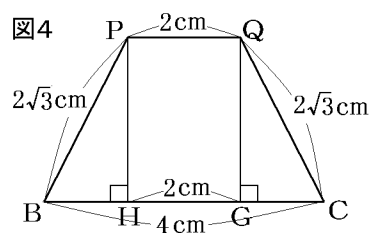
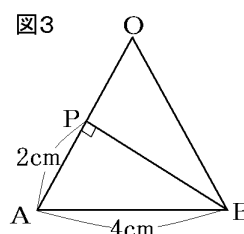
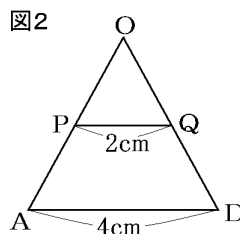
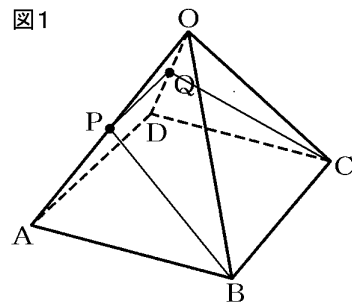
P 、 Q から辺 BC に垂線 PH 、 QG をおろす。

$$HG = PQ = 2\text{cm} \text{ なので、} BH = CG = (4 - 2) \div 2 = 1(\text{cm})$$

直角三角形 PBH で、三平方の定理より、

$$PH = \sqrt{PB^2 - BH^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{11}(\text{cm})$$

$$\text{よって、(台形 } PBCQ \text{ の面積)} = (PQ + BC) \times PH \div 2 = (2 + 4) \times \sqrt{11} \div 2 = 3\sqrt{11}(\text{cm}^2)$$



[問題 5]

右の図のように、円すいの中に球がすきまのない状態で入っている。円すいの底面の半径は 3cm 、母線の長さは 9cm である。次の問いに答えなさい。

(1) 円すいの体積を求めなさい。

(2) 円すいの中に入っている球の半径を求めなさい。

[解答欄]

(1) $18\sqrt{2}\pi\text{cm}^3$	(2) $\frac{3\sqrt{2}}{2}\text{cm}$
--------------------------------	------------------------------------

[解説]

<Point> 接点を含む断面で考える。

(1) 高さを h とすると三平方の定理より、

$$h = \sqrt{9^2 - 3^2} = \sqrt{81 - 9} = \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$(\text{円すいの体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 6\sqrt{2}$$

$$= 18\sqrt{2}\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

(2) 球の半径を $x\text{cm}$ とする。

<Point> 内接円の半径：面積利用で計算

右図の $\triangle ABC$ の面積に注目すると、

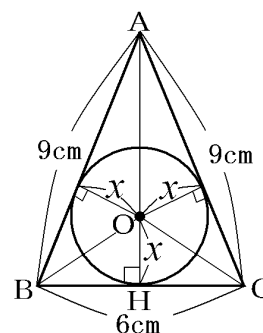
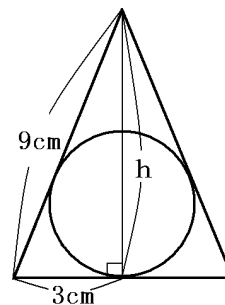
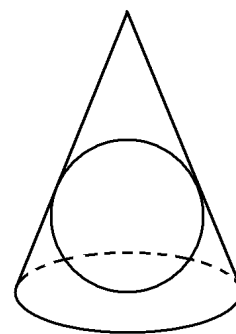
$(\triangle OBC \text{ の面積}) + (\triangle OAB \text{ の面積}) + (\triangle OAC \text{ の面積}) = (\triangle ABC \text{ の面積})$ なので、

$$\frac{1}{2} \times 6 \times x + \frac{1}{2} \times 9 \times x + \frac{1}{2} \times 9 \times x = \frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{2}$$

$$\text{両辺を 2 倍すると、} 6x + 9x + 9x = 36\sqrt{2}, \quad 24x = 36\sqrt{2}$$

$$x = 36\sqrt{2} \div 24 = \frac{36\sqrt{2}}{24} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ (cm)}$$

$$\text{よって球の半径は、} \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$$



[問題 6]

底面の 1 辺が 6cm で、高さが 4cm の正四角すい ABCDE と、その四角すいの底面および 4 つの側面に、右図のように、それぞれ点 H, P, Q, R, S で接する球 O があるとき、球 O の半径を求めよ。

[解答欄]

$$\frac{3}{2} \text{ cm}$$

[解説]

<Point> 接点を含む断面で考える。

右の図 1 のように、辺 BC の中点を M、辺 ED の中点を N とすると、

図 2 のように、点 P, 点 R, 球の中心 O は $\triangle AMN$ 上にある。

図 2 の $\triangle AMN$ の面積に注目する。

まず、MN を底辺とすると、高さは AH なので、

$$(\triangle AMN \text{ の面積}) = 6 \times 4 \div 2 = 12 (\text{cm}^2)$$

また、 $\triangle AMN$ は、 $\triangle OMN$ と $\triangle OAM$ と $\triangle OAN$ の和に等しい。

<Point> 内接円の半径：面積利用で計算

球の半径を $x \text{ cm}$ とすると、

$$(\triangle OMN \text{ の面積}) = MN \times OH \div 2 = 6 \times x \div 2 = 3x (\text{cm}^2)$$

直角三角形 AMH で、三平方の定理より、

$$AM = \sqrt{MH^2 + AH^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 (\text{cm})$$

同様に、 $AN = 5 \text{ cm}$

$$(\triangle OAM \text{ の面積}) = AM \times OP \div 2 = 5 \times x \div 2 = \frac{5}{2}x$$

$$(\triangle OAN \text{ の面積}) = AN \times OR \div 2 = 5 \times x \div 2 = \frac{5}{2}x$$

$$\text{よって、} 3x + \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}x = 12, 8x = 12, x = 12 \div 8, x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} (\text{cm})$$

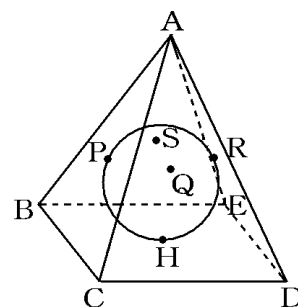


図1

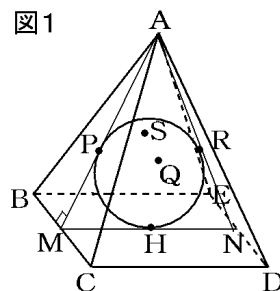
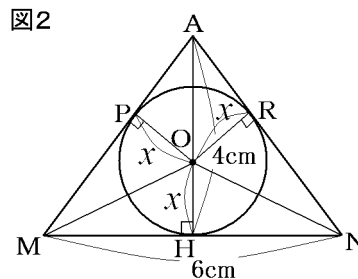


図2



[問題 7]

右の図のように、直径が **12cm** の球の形をしたプラスチックの容器がある。この容器の中にちょうど入る立方体の 1 辺の長さを求めよ。ただし、プラスチックの容器の厚さは考えないものとする。

[解答欄]

$$4\sqrt{3}\text{ cm}$$

[解説]

立方体の 8 つの頂点が、球に内接している。

右図のように、立方体の対角線 **DF** の中点に球の中心 **O** があり、**DF** は球の直径になる。

この立方体の 1 辺を **x cm** とする。

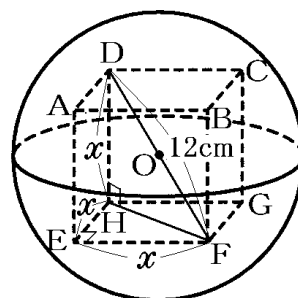
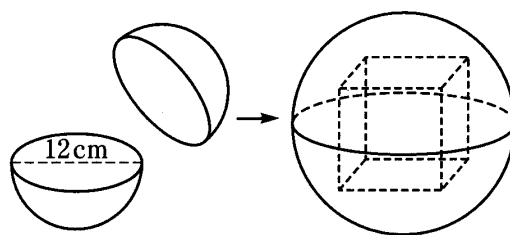
右図の直角三角形 **HFE** で、三平方の定理より、

$$HF = \sqrt{HE^2 + FE^2} = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{x^2 \times 2} = \sqrt{2}x \text{ (cm)}$$

直角三角形 **DFH** で、三平方の定理より、

$$DF = \sqrt{DH^2 + HF^2} = \sqrt{x^2 + (\sqrt{2}x)^2} = \sqrt{x^2 + 2x^2} = \sqrt{x^2 \times 3} = \sqrt{3}x \text{ (cm)}$$

$$\text{DF は球の直径なので, } \sqrt{3}x = 12, x = 12 \div \sqrt{3} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}$$



[問題 8]

右の図のように、1 辺が 2cm の立方体が球に内接している。この立方体の 1 つの面 ABCD を底面とする正四角すい P-ABCD で、その 5 つの頂点は、球にぴったりとくっついている。このとき、正四角すい P-ABCD の体積を求めよ。

[解答欄]

$$\frac{4\sqrt{3}-4}{3}\text{cm}^3$$

[解説]

右図の PT(高さ)がわかれば、正四角すい P-ABCD の体積を求めることができる。PT=PO-TO で、

TO=AE÷2=2÷2=1(cm)なので、

球の半径(PO)を求めればよい。

右の図 1 の直角三角形 EGF で、

三平方の定理より、

$$EG = \sqrt{EF^2 + GF^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$$

(cm)

直角三角形 AGE で、三平方の定理より、

$$AG = \sqrt{AE^2 + GE^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

AG は球の直径なので、球の半径は $2\sqrt{3} \div 2 = \sqrt{3}$ (cm)になる。

したがって、PO=√3 cm

よって、PT=PO-TO=√3-1(cm)

(正四角すい P-ABCD の体積) = $\frac{1}{3} \times (\text{底面積 ABCD}) \times (\text{高さ PT})$

$$= \frac{1}{3} \times (2 \times 2) \times (\sqrt{3} - 1) = \frac{4(\sqrt{3} - 1)}{3} = \frac{4\sqrt{3} - 4}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

