

第 2 章	数学(3 年)	名前:	日 付	No.02
	式の計算 2			

[問題 1]

連続する 2 つの整数の 2 乗の差は、その 2 数の和に等しいことを次のように証明した。

()の中にあてはまる数や式を入れなさい。

<証明>

2 つの整数を小さい方を n ，大きい方を(ア)とすると，

2 乗の差は，

(ア)² - n^2 = (イ) - n^2 = (ウ)

2 数の和は，(ア) + n = (エ)

したがって，連続する 2 つの整数の 2 乗の差は，その 2 数の和に等しい。

[解答欄]

(ア) $n+1$	(イ) $n^2 + 2n + 1$	(ウ) $2n + 1$	(エ) $2n + 1$
-----------	--------------------	--------------	--------------

[解説]

例えば，連続する 2 つの整数 5, 6 は，5, 5+1 と表すことができる。小さい方の整数を n とすると，連続する 2 整数は， $n, n+1$ と表すことができる。

[問題 2]

連続する 3 つの整数で，まん中の整数の 2 乗から 1 をひいた数は，両端の整数の積に等しい。このことを証明しなさい。

[解答欄]

連続する 3 つの整数を $n-1, n, n+1$ とおくと，

まん中の整数の 2 乗から 1 をひいた数は， $n^2 - 1 \cdots \textcircled{1}$

両端の整数の積は， $(n-1)(n+1) = n^2 - 1 \cdots \textcircled{2}$

①と②は等しい。

よって，まん中の整数の 2 乗から 1 をひいた数は，両端の整数の積に等しい。

[解説]

例えば，連続する 3 つの整数 5, 6, 7 は，5, 5+1, 5+2 と表すことができる。一般的には，整数 n を使って， $n, n+1, n+2$ と表すことができる。

真ん中の数を基準にとれば，例えば，3 つの整数 5, 6, 7 は，6-1, 6, 6+1 と表すことができる。真ん中の整数を n とおくと， $n-1, n, n+1$ と表すことができる。証明問題では $n-1, n, n+1$ を使った方が計算が楽になることが多い。

[問題 3]

2, 3, 4や7, 8, 9のような連続する3つの整数があります。このとき、次の問いに答えなさい。

(1) 中央の数の2乗から他の2つの数の積を引いた差は、常に一定の値になります。

この値を求めなさい。

(2) 中央の数を n として、(1)のことがらを説明しなさい。

[解答欄]

(1) 1

(2) 連続する3つの数を、 $n-1, n, n+1$ とすると、

(中央の数の2乗) $=n^2$

(他の2つの数の積) $= (n-1)(n+1) = n^2 - 1$

ゆえに、(中央の数の2乗) $-($ 他の2つの数の積 $) = n^2 - (n+1)(n-1) = n^2 - (n^2 - 1) = 1$

よって中央の数の2乗から他の2つの数の積を引いた差は、常に一定の値1になる。

[解説]

(1) 2, 3, 4の場合、(中央の数の2乗) $=3^2=9$ 、(他の2つの数の積) $=2 \times 4=8$ なので、(中央の数の2乗) $-($ 他の2つの数の積 $)=9-8=1$

7, 8, 9の場合、(中央の数の2乗) $-($ 他の2つの数の積 $)=8^2-7 \times 9=64-63=1$

(2) 例えば、連続する3つの整数5, 6, 7は、5, $5+1$, $5+2$ と表すことができる。一般的には、整数 n を使って、 $n, n+1, n+2$ と表すことができる。

真ん中の数を基準にとれば、例えば、3つの整数5, 6, 7は、 $6-1, 6, 6+1$ と表すことができる。真ん中の整数を n とおくと、 $n-1, n, n+1$ と表すことができる。証明問題では $n-1, n, n+1$ を使った方が計算が楽になることが多い。

[問題 4]

連続する3つの整数のうち、もっとも小さい数の2乗は他の2数の積より29小さくなる。このとき、次の問いに答えなさい。

(1) 連続する3つの整数を、整数 x を使って表しなさい。

(2) この3つの数を求めなさい。

[解答欄]

(1) $x-1, x, x+1$

(2) 9, 10, 11

[解説]

(1) 真ん中の数を x とおくと、計算が楽になる場合が多い。

(2) 「AはBより5大きい」は $A=B+5$ 、「AはBより5小さい」は $A=B-5$ と機械的に等式に直すことができる。

もっとも小さい数 $x-1$ の2乗は他の2数 $x, x+1$ の積より29小さくなるので、

$$(x-1)^2 = x(x+1) - 29, x^2 - 2x + 1 = x^2 + x - 29, x^2 - 2x - x^2 - x = -29 - 1$$

$$-3x = -30 \quad \text{ゆえに } x = 10$$

$$x-1 = 10-1 = 9, x+1 = 10+1 = 11 \text{ なので、3数は9, 10, 11}$$

[問題 5]

下の式のように、連続する 2 つの偶数の積に 1 をたした数は、その間の奇数の 2 乗になる。
このことを、下のように証明した。下の空欄にあてはまる式や言葉を答えなさい。

$$8 \times 10 + 1 = 9 \times 9$$

(証明)

連続する 2 つの偶数を、自然数 n を使って、(ア), (イ) とすると、
それらの積に 1 をたした数は、

(ウ) $= 4n^2 + 4n + 1 = (\text{エ})^2$ となり、(オ) と等しくなる。

[解答欄]

(ア) $2n$	(イ) $2n+2$	(ウ) $2n(2n+2)+1$
(エ) $2n+1$	(オ) $2n$ と $2n+2$ の間の奇数の 2 乗	

[解説]

例えば、偶数については $6 = 2 \times 3$, $8 = 2 \times 4$ のように $2 \times (\text{整数})$ と表すことができる。整数 n を使って $2 \times n = 2n$ と表すことができる。

連続する 2 つの偶数、例えば、6, 8 は 6 , $6+2$ と表すことができる。

小さい方の偶数を $2n$ とすると、大きい方の偶数は $2n+2$ と表すことができる。

[問題 6]

1 辺が $a \text{ m}$ の正方形の土地があります。この土地の縦を 6 m 長く、横を 6 m 短くして長方形を作ると、面積は、もとの土地よりも大きくなるのか、小さくなるのかを次のようにして考えました。次の問いに答えなさい。

- (1) 1 辺が $a \text{ m}$ の正方形の土地の面積を求めよ。
- (2) 新しくできた土地の面積を求めよ。
- (3) どちらの土地がどれだけ大きいですか。

[解答欄]

(1) $a^2 \text{ m}^2$	(2) $a^2 - 36 \text{ m}^2$	(3) もとの土地が 36 m^2 だけ大きい
-----------------------	----------------------------	-----------------------------------

[解説]

(1) (正方形 ABCD の面積) $= (1 \text{ 辺})^2 = a \times a = a^2 \text{ m}^2$

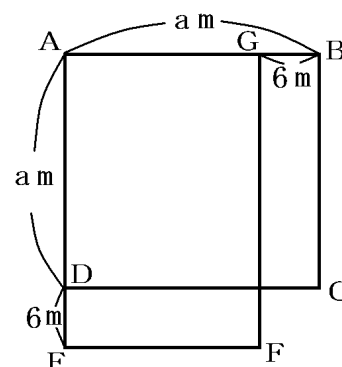
(2) $AE = a + 6 (\text{m})$, $AG = a - 6 (\text{m})$ なので、

(長方形 AEGF の面積) $= AE \times AG = (a + 6)(a - 6) = a^2 - 36 \text{ m}^2$

(3) (正方形 ABCD の面積) $-$ (長方形 AEGF の面積)

$$= a^2 - (a^2 - 36) = a^2 - a^2 + 36 = 36 \text{ m}^2$$

よって、もとの土地が 36 m^2 だけ大きい



[問題 7]

縦と横の長さが x m の正方形がある。次の問いに答えなさい。

- (1) 縦と横の長さをそれぞれ 2 m ずつ長くすると、面積はどれだけ増えるか求めなさい。
 (2) 縦の長さを 3 m 長くし、横の長さを 2 m 短くすると、面積はどれだけ増えるか求めなさい。

[解答欄]

(1) $4x + 4$ (m ²) 増える	(2) $x - 6$ (m ²) 増える
------------------------------------	-----------------------------------

[解説]

$$(1) (\text{もとの正方形の面積}) = (1 \text{ 辺})^2 = x^2 \text{ m}^2$$

縦と横の長さをそれぞれ 2 m ずつ長くすると、1 辺が $x + 2$ (m) の正方形になるので、

$$(\text{新しい正方形の面積}) = (1 \text{ 辺})^2 = (x + 2)^2 = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 = x^2 + 4x + 4$$

ゆえに、(新しい正方形の面積) - (もとの正方形の面積) =

$$= x^2 + 4x + 4 - x^2 = 4x + 4 \text{ (m}^2\text{)}$$

よって、 $4x + 4$ (m²) 増える

$$(2) (\text{もとの正方形の面積}) = (1 \text{ 辺})^2 = x^2 \text{ m}^2$$

縦の長さを 3 m 長くし、横の長さを 2 m 短くすると、縦が $x + 3$ (m)、横が $x - 2$ (m) の長方形ができるので、

$$(\text{新しい長方形の面積}) = (\text{縦}) \times (\text{横}) = (x + 3)(x - 2) = x^2 + (3 - 2)x + 3 \times (-2) = x^2 + x - 6$$

ゆえに、(新しい長方形の面積) - (もとの正方形の面積) =

$$x^2 + x - 6 - x^2 = x - 6 \text{ (m}^2\text{)}$$

よって、 $x - 6$ (m²) 増える

(注) $x > 6$ のとき $x - 6 > 0$ なので増加。 $x = 6$ のときは 0 増加するので等しい。

$x < 6$ のときは $x - 6 < 0$ なので(マイナスの値)だけ増加、すなわち減少する。