

|       |         |     |     |       |
|-------|---------|-----|-----|-------|
| 第 4 章 | 数学(3 年) | 名前: | 日 付 | No.02 |
|       | 平方根 2   |     |     |       |

[問題 1]

$x = \sqrt{2} + 1$ ,  $y = \sqrt{2} - 1$  のとき, 次の式の値を求めなさい。

(1)  $x^2 - y^2$                       (2)  $x^2 + y^2 + 2xy$

[解答欄]

|                 |       |
|-----------------|-------|
| (1) $4\sqrt{2}$ | (2) 8 |
|-----------------|-------|

[解説]

$x$ ,  $y$  の値をそのまま代入しても答えは出るが, 因数分解の公式を使って, 式を変形し, 変形したものに  $x$ ,  $y$  を代入すると計算が簡単なように問題が作られている。

(1) \*  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$  の公式を使う。

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = (\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1) = 4\sqrt{2}$$

(2) \*  $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$  の公式を使う。

$$x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2 = (\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1)^2 = 8$$

[問題 2]

$x = 2 + \sqrt{3}$ ,  $y = 2 - \sqrt{3}$  のとき, 次の式の値を求めなさい。

(1)  $xy - y^2$                       (2)  $x^2 + 2xy + y^2$

[解答欄]

|                      |        |
|----------------------|--------|
| (1) $-6 + 4\sqrt{3}$ | (2) 16 |
|----------------------|--------|

[解説]

$x$ ,  $y$  の値をそのまま代入しても答えは出るが, 因数分解の公式を使って, 式を変形し, 変形したものに  $x$ ,  $y$  を代入すると計算が簡単なように問題が作られている。

$$(1) \quad xy - y^2 = y(x - y) = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}) = (2 - \sqrt{3}) \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 6$$

(2) \*  $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$  の公式を使う。

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = (2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3})^2 = 16$$

[問題 3]

$a = 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}$ ,  $b = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$  のとき,  $a^2 + 5ab + b^2$  の値を求めよ。

[解答欄]

5

[解説]

$a^2 + 2ab + b^2$  なら  $(a+b)^2$  と因数分解して代入するが,  $a^2 + 5ab + b^2$  は因数分解できない。そこで,  $5ab$  を  $2ab$  と  $3ab$  に分ける

$$a^2 + 5ab + b^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + 3ab = (a+b)^2 + 3ab$$

$$a+b=2, \quad ab = \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ なので,}$$

$$(a+b)^2 + 3ab = 2^2 + 3 \times \frac{1}{3} = 4 + 1 = 5$$

[問題 4]

$a = \sqrt{5} - 1$ ,  $b = \sqrt{3} - 1$  のとき,  $ab + a + b + 1$  の値を求めなさい。

[解答欄]

 $\sqrt{15}$ 

[解説]

そのまま代入しても計算できるが, 式を因数分解して代入する方がスマート。

$ab + a + b + 1$  の最初の 2 項を  $a$  でくくり出すと,

$$ab + a + b + 1 = a(b+1) + (b+1) \quad \text{ここで } b+1 = M \text{ とおくと,}$$

$$(\text{式}) = aM + M = M(a+1) = (b+1)(a+1) \quad a = \sqrt{5} - 1, \quad b = \sqrt{3} - 1 \text{ を代入すると,}$$

$$(b+1)(a+1) = (\sqrt{3} - 1 + 1)(\sqrt{5} - 1 + 1) = \sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15}$$

[問題 5]

$b = \frac{1}{a} + a$  のとき,  $a$  が  $\sqrt{3}$  ならば,  $b$  は  $a$  の何倍か。

[解答欄]

$$\frac{4}{3} \text{ 倍}$$

[解説]

$$b = \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ なので } \frac{4}{3} \text{ 倍}$$

[問題 6]

$\sqrt{54a}$  が最小の自然数となるような自然数  $a$  の値を求めなさい。

[解答欄]

$$a = 6$$

[解説]

\*まず  $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$  をつかって  $\sqrt{\quad}$  の中をできるだけ簡単な数にする。

$\sqrt{54a} = \sqrt{9 \times 6a} = 3\sqrt{6a}$   $3\sqrt{6a}$  が自然数となるためには、 $6a$  がある数の 2 乗にならなければならない。

そのうち最小なのは  $a = 6$

[問題 7]

$\sqrt{180x}$  がもっとも小さい整数になるような自然数  $x$  の値を求めなさい。

[解答欄]

$$x = 5$$

[解説]

\*まず  $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$  をつかって  $\sqrt{\quad}$  の中をできるだけ簡単な数にする。

$\sqrt{180x} = \sqrt{36 \times 5x} = 6\sqrt{5x}$   $6\sqrt{5x}$  が自然数となるためには、 $5x$  がある数の 2 乗にならなければならない。

そのうち最小なのは  $x = 5$

[問題 8]

$\sqrt{270m}$  が自然数となる自然数  $m$  のうち、もっとも小さいものを求めなさい。

[解答欄]

$$m = 30$$

[解説]

\*まず  $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$  をつかって  $\sqrt{\quad}$  の中をできるだけ簡単な数にする。

$\sqrt{270m} = \sqrt{9 \times 30m} = 3\sqrt{30m}$   $\sqrt{30m}$  が自然数となるためには、 $30m$  がある数の 2 乗にならなければならない。そのうち最小なのは  $m = 30$

[問題 9]

$a, b$  を自然数とすると、 $\sqrt{24 \times a} = b$  をみたす  $a, b$  の最小の値を求めなさい。

[解答欄]

|                 |
|-----------------|
| $a = 6, b = 12$ |
|-----------------|

[解説]

\*まず  $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$  をつかって  $\sqrt{\quad}$  の中をできるだけ簡単な数にする。

$\sqrt{24 \times a} = \sqrt{4 \times 6 \times a} = 2\sqrt{6a}$  なので、 $\sqrt{6a}$  が自然数となるためには、 $6a$  がある数の 2 乗にならなければならない。そのうち最小なのは  $a = 6$

$$a = 6 \text{ のとき } b = 2\sqrt{6a} = 2\sqrt{6^2} = 2 \times 6 = 12$$

[問題 10]

$\sqrt{13-a}$  の値が整数となるような、正の整数  $a$  の値をすべて求めなさい。

[解答欄]

|              |
|--------------|
| 4, 9, 12, 13 |
|--------------|

[解説]

$\sqrt{13-a}$  が整数となるためには、 $13-a$  がある整数の 2 乗になることが必要。

$13-a < 13$  なので、これを満たすのは、 $13-a = 0, 1, 2^2, 3^2$  のとき

$13-a = 0$  のとき、 $-a = -13$ ,  $a = 13$

$13-a = 1$  のとき、 $-a = 1-13$ ,  $-a = -12$ ,  $a = 12$

$13-a = 2^2$  のとき、 $-a = 4-13$ ,  $-a = -9$ ,  $a = 9$

$13-a = 3^2$  のとき、 $-a = 9-13$ ,  $-a = -4$ ,  $a = 4$  ゆえに、 $a = 4, 9, 12, 13$

[問題 11]

$\sqrt{14-a}$  の値が整数となるような自然数  $a$  の値をすべて求めなさい。

[解答欄]

5, 10, 13, 14

[解説]

$\sqrt{14-a}$  が整数となるためには、 $14-a$  がある整数の 2 乗になることが必要。

$4-a < 14$  なので、これを満たすのは、 $14-a = 0, 1, 2^2, 3^2$  のとき。

$14-a = 0$  のとき、 $-a = -14$ ,  $a = 14$

$14-a = 1$  のとき、 $-a = 1-14$ ,  $-a = -13$ ,  $a = 13$

$14-a = 2^2$  のとき、 $-a = 4-14$ ,  $-a = -10$ ,  $a = 10$ ,

$14-a = 3^2$  のとき、 $-a = 9-14$ ,  $-a = -5$ ,  $a = 5$

ゆえに、 $a = 5, 10, 13, 14$

[問題 12]

$\sqrt{22-3n}$  が整数となるような自然数  $n$  の値をすべて求めなさい。

[解答欄]

$n = 2, 6, 7$

[解説]

$\sqrt{22-3n}$  が整数となるためには、 $22-3n$  がある整数の 2 乗になることが必要。

$22-3n < 22$  なので、これを満たすのは、 $22-3n = 1, 2^2, 3^2, 4^2$  のとき。

$22-3n = 1$  のとき、 $-3n = -21$ ,  $n = 7$

$22-3n = 2^2$  のとき、 $-3n = -18$ ,  $n = 6$

$22-3n = 3^2$  のとき、 $-3n = -13$ ,  $n = \frac{13}{3}$   $n$  は自然数なので不適

$22-3n = 4^2$  のとき、 $-3n = -6$ ,  $n = 2$

ゆえに、 $n = 2, 6, 7$

[問題 13]

$\sqrt{24-3a}$  の値が整数となるような自然数  $a$  の値をすべて求めよ。

[解答欄]

$a = 5, 8$

[解説]

$\sqrt{24-3a}$  が整数となるためには、 $24-3a$  がある整数の 2 乗になることが必要。

$24-3a < 24$  なので、これを満たすのは、 $24-3a = 0, 1, 2^2, 3^2, 4^2$  のとき。

$24-3a = 0$  のとき、 $-3a = -24$ 、 $a = 8$

$24-3a = 1$  のとき、 $-3a = 1-24$ 、 $-3a = -23$ 、 $a = \frac{23}{3}$

$24-3a = 2^2$  のとき、 $-3a = 4-24$ 、 $-3a = -20$ 、 $a = \frac{20}{3}$

$24-3a = 3^2$  のとき、 $-3a = 9-24$ 、 $-3a = -15$ 、 $a = 5$

$24-3a = 4^2$  のとき、 $-3a = 16-24$ 、 $-3a = -8$ 、 $a = \frac{8}{3}$

このうち  $a$  が整数になるのは、 $a = 5, 8$