

第 4 章	数学(3 年)	名前:	日 付	No.03
	平方根 2			

[問題 1]

$\sqrt{21-4n}$ の値が整数となるような正の整数 n の値をすべて求めなさい。

[解答欄]

$n = 3, 5$

[解説]

$\sqrt{21-4n}$ が整数となるためには、 $21-4n$ がある整数の 2 乗になることが必要。

$21-4n < 21$ なので、これを満たすのは、 $21-4n = 0, 1, 2^2, 3^2, 4^2$ のとき。

$$21-4n=0 \text{ のとき, } -4n=-21, n=\frac{21}{4}$$

$$21-4n=1 \text{ のとき, } -4n=1-21, -4n=-20, n=5$$

$$21-4n=2^2 \text{ のとき, } -4n=4-21, -4n=-17, n=\frac{17}{4}$$

$$21-4n=3^2 \text{ のとき, } -4n=9-21, -4n=-12, n=3$$

$$21-4n=4^2 \text{ のとき, } -4n=16-21, -4n=-5, n=\frac{5}{4}$$

このうち、 n が整数になるのは、 $n = 3, 5$

[問題 2]

a を自然数とすると、 $\sqrt{100-2a}$ が自然数となる a は全部でいくつあるか。

[解答欄]

4 個

[解説]

$\sqrt{100-2a}$ が自然数となるためには、 $100-2a$ がある整数の 2 乗になることが必要。

$100-2a < 100$, $100-2a = 2(50-a)$ なので $100-2a$ は偶数

これを満たすのは、 $100-2a = 2^2, 4^2, 6^2, 8^2$ のとき。

$$100-2a=2^2 \text{ のとき, } -2a=4-100, -2a=-96, a=48$$

$$100-2a=4^2 \text{ のとき, } -2a=16-100, -2a=-84, a=42$$

$$100-2a=6^2 \text{ のとき, } -2a=36-100, -2a=-64, a=32$$

$$100-2a=8^2 \text{ のとき, } -2a=64-100, -2a=-36, a=18$$

ゆえに、 $a = 48, 42, 32, 18$ の 4 個

[問題 3]

2 つの自然数 a, b について, $\sqrt{2a}, \sqrt{7b}$ がともに自然数となり, $\sqrt{2a} = \sqrt{7b}$ が成り立っています。

このとき, 最小の a と b の値を求めなさい。

[解答欄]

$$a = 98, b = 28$$

[解説]

(少し難しい問題)

$$\sqrt{2a} = \sqrt{7b} \text{ の両辺を } 2 \text{ 乗すると, } 2a = 7b$$

$A = 2a = 7b$ とおくと, $A = 2a$ より A は 2 の倍数, また $A = 7b$ より A は 7 の倍数でもある。

ゆえに, $A = 2 \times 7m$ (m は自然数) と表すことができる。

$\sqrt{A} = \sqrt{2a} = \sqrt{7b}$ は自然数なので, A はある自然数の 2 乗にならなければならない。

自然数を 2 乗した平方数を素因数分解すると, 各素因数の指数は偶数になる。

$$\text{例: } 12^2 = (2^2 \times 3)^2 = 2^4 \times 3^2 \text{ で指数 } 4, 2 \text{ はいずれも偶数}$$

したがって, $A = 2 \times 7 \times m$ の指数部分がすべて偶数になるような一番小さい数 m をかけてやればよい。
この条件を満たす m は 2×7 である。

$$\text{このとき, } A = 2 \times 7 \times 2 \times 7 = 2^2 \times 7^2 = (2 \times 7)^2 = 14^2 \text{ で } \sqrt{A} = \sqrt{14^2} = 14$$

$$2a = A = 2^2 \times 7^2 \text{ なので } a = 2 \times 7^2 = 98, \quad 7b = A = 2^2 \times 7^2 \text{ なので } b = 2^2 \times 7 = 28$$

[問題 4]

$\sqrt{58}$ を小数で表したとき, その中の整数部分の数はいくつか答えなさい。

[解答欄]

$$7$$

[解説]

$$7^2 = 49, 8^2 = 64$$

$$49 < 58 < 64 \text{ より, } \sqrt{49} < \sqrt{58} < \sqrt{64} \text{ なので, } 7 < \sqrt{58} < 8$$

ゆえに, $\sqrt{58} = 7.\cdots$ という数になるので, 整数部分の数は 7 になる。

[問題 5]

$\sqrt{307}$ を小数で表したとき, 整数部分の値を求めなさい。

[解答欄]

$$17$$

[解説]

$$17^2 = 289, 18^2 = 324$$

$$289 < 307 < 324 \text{ より, } \sqrt{289} < \sqrt{307} < \sqrt{324} \text{ なので, } 17 < \sqrt{307} < 18$$

ゆえに, $\sqrt{307} = 17.\cdots$ という数になるので, 整数部分の数は 17 になる。

[問題 6]

$\sqrt{3}$ の小数部分を a とするとき、 $(a-1)^2$ の値を求めなさい。

[解答欄]

$$7-4\sqrt{3}$$

[解説]

$1 < 3 < 4$ より、 $\sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$ なので、 $1 < \sqrt{3} < 2$

ゆえに、 $\sqrt{3} = 1. \cdots$ という数になるので、整数部分の数は1になる。

$\sqrt{3} = (\text{整数部分}) + (\text{小数部分 } a)$ なので、 $\sqrt{3} = 1 + a$ ゆえに、 $a = \sqrt{3} - 1$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに、} (a-1)^2 &= (\sqrt{3}-1-1)^2 = (\sqrt{3}-2)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 2 + 2^2 \\ &= 3 - 4\sqrt{3} + 4 = 7 - 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

[問題 7]

$\sqrt{63} - \sqrt{x} = \sqrt{7}$ の等式を成り立たせる、正の整数 x の値を求めなさい。

[解答欄]

$$x = 28$$

[解説]

$$\sqrt{63} - \sqrt{x} = \sqrt{7} \text{ より } \sqrt{x} = \sqrt{63} - \sqrt{7} = 3\sqrt{7} - \sqrt{7} = 2\sqrt{7} = \sqrt{28}$$

ゆえに、 $x = 28$

[問題 8]

$\sqrt{216} - \sqrt{n} = \sqrt{6}$ の等式を成り立たせる正の整数 n の値を求めなさい。

[解答欄]

$$150$$

[解説]

$$\sqrt{216} = \sqrt{36 \times 6} = 6\sqrt{6} \quad \sqrt{216} - \sqrt{n} = \sqrt{6}, \quad 6\sqrt{6} - \sqrt{n} = \sqrt{6}$$

$$\text{ゆえに、} \sqrt{n} = 6\sqrt{6} - \sqrt{6} = 5\sqrt{6} = \sqrt{25 \times 6} = \sqrt{150}$$

よって $n = 150$

[問題 9]

次にあげる数について、下の問いに答えなさい。

$$\frac{27}{3}, 0, -6, \sqrt{25}, \sqrt{5}, \frac{\sqrt{11}}{2}, \pi, \sqrt{3}+7, \frac{\sqrt{9}}{5}$$

- (1) 無理数を選びなさい。
- (2) 有理数を選びなさい。
- (3) 整数を選びなさい。
- (4) 自然数を選びなさい。

[解答欄]

(1) $\sqrt{5}, \frac{\sqrt{11}}{2}, \pi, \sqrt{3}+7$	(2) $\frac{27}{3}, 0, -6, \sqrt{25}, \frac{\sqrt{9}}{5}$	(3) $\frac{27}{3}, 0, -6, \sqrt{25}$
(4) $\frac{27}{3}, \sqrt{25}$		

[解説]

数の集合は、有理数と無理数に分けることができる。

有理数の中に、整数($\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \cdots$)の集合が含まれる。整数の中で、正の整数($1, 2, 3 \cdots$)を自然数という。

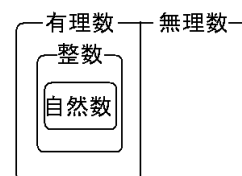
問題の数を有理数と無理数に分けると、

$$\text{無理数: } \sqrt{5}, \frac{\sqrt{11}}{2}, \pi, \sqrt{3}+7$$

$$\text{有理数: } \frac{27}{3} (=9), 0, -6, \sqrt{25} (=5), \frac{\sqrt{9}}{5} \left(=\frac{3}{5} \right)$$

これらの有理数のうち、整数は $\frac{27}{3} (=9), 0, -6, \sqrt{25} (=5)$ である。

その中で、 $\frac{27}{3} (=9), \sqrt{25} (=5)$ は自然数である。



[問題 10]

次の分数を小数で表しなさい。

$$(1) \frac{8}{9}$$

$$(2) \frac{5}{12}$$

$$(3) \frac{8}{13}$$

[解答欄]

(1) $0.\dot{8}$	(2) $0.41\dot{6}$	(3) $0.\dot{6}1538\dot{4}$
-----------------	-------------------	----------------------------

[問題 11]

次の循環小数を分数に直しなさい。

(1) $2.\dot{4}\dot{5}$

(2) $1.\dot{2}3\dot{4}$

[解答欄]

(1) $\frac{27}{11}$	(2) $\frac{137}{111}$
---------------------	-----------------------

[解説]

(1) $x = 2.454545\cdots$ とおく。

循環する数(45)は2個なので、 x を100倍して、

$$100x = 245.454545\cdots$$

$$100x - x = 245.454545\cdots - 2.45454545\cdots$$

$$99x = 243 \quad \text{よって, } x = 243 \div 99 = \frac{243}{99} = \frac{27}{11}$$

(2) $x = 1.234234234\cdots$ とおく。

循環する数(234)は3個なので、 x を1000倍して、

$$1000x = 1234.234234\cdots$$

$$1000x - x = 1234.234234\cdots - 1.234234\cdots$$

$$999x = 1233 \quad \text{よって, } x = 1233 \div 999 = \frac{1233}{999} = \frac{137}{111}$$