

第 5 章	数学(3 年)	名前:	日 付	No.02
	二次方程式の計算			

[問題 1]

次の方程式を解きなさい。

(1) $2x^2 = 50$ (2) $5x^2 = 35$ (3) $(x+1)^2 = 36$ (4) $(x-1)^2 = 5$

[解答欄]

(1) $x = \pm 5$	(2) $x = \pm\sqrt{7}$	(3) $x = 5, -7$	(4) $x = 1 \pm \sqrt{5}$
-----------------	-----------------------	-----------------	--------------------------

[解説]

(1) まず x^2 の係数を 1 にするように $2x^2 = 50$ の両辺を 2 で割る。 $x^2 = 25$ ゆえに $x = \pm 5$

(2) $5x^2 = 35$, $x^2 = 7$ ゆえに $x = \pm\sqrt{7}$

(3) $(x+1)^2 = 36$ より $x+1 = \pm 6$ ゆえに $x+1 = 6$ のとき $x = 5$, $x+1 = -6$ のとき $x = -7$

(4) $(x-1)^2 = 5$ よって $x-1 = \pm\sqrt{5}$ ゆえに $x = 1 \pm \sqrt{5}$

[問題 2]

次の方程式を解きなさい。

(1) $x^2 = 36$ (2) $9x^2 = 10$ (3) $3x^2 - 24 = 0$

(4) $(x-2)^2 = 17$ (5) $(x+5)^2 - 64 = 0$

[解答欄]

(1) $x = \pm 6$	(2) $x = \pm \frac{\sqrt{10}}{3}$	(3) $x = \pm 2\sqrt{2}$
(4) $x = 2 \pm \sqrt{17}$	(5) $-13, 3$	

[解説]

(1) $x^2 = 36$, $x = \pm 6$

(2) $9x^2 = 10$, $x^2 = \frac{10}{9}$ ゆえに, $x = \pm \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{9}} = \pm \frac{\sqrt{10}}{3}$

(3) $3x^2 - 24 = 0$, $3x^2 = 24$, $x^2 = 8$ ゆえに $x = \pm\sqrt{8} = \pm\sqrt{4 \times 2} = \pm 2\sqrt{2}$

(4) $(x-2)^2 = 17$, $x-2 = \pm\sqrt{17}$, ゆえに $x = 2 \pm \sqrt{17}$

(5) $(x+5)^2 - 64 = 0$, $(x+5)^2 = 64$, $x+5 = \pm 8$ よって $x+5 = -8$ のとき $x = -13$

$x+5 = 8$ のとき $x = 3$

[問題 3]

$$(1) (x+1)^2 = 36 \qquad (2) (x-3)^2 = 7$$

[解答欄]

(1) $x = 5, -7$	(2) $x = 3 \pm \sqrt{7}$
-----------------	--------------------------

[解説]

$$(1) (x+1)^2 = 36, \quad x+1 = \pm 6, \quad x+1 = 6 \text{ のとき } x = 6-1 = 5,$$

$$x+1 = -6 \text{ のとき } x = -6-1 = -7 \quad \text{ゆえに } x = 5, -7$$

$$(2) (x-3)^2 = 7, \quad x-3 = \pm\sqrt{7}, \quad x = \pm\sqrt{7} + 3 = 3 \pm \sqrt{7}$$

[問題 4]

二次方程式 $x^2 + 8x + 3 = 0$ を以下のようにして解いた。() にあてはまる数や式を求めなさい。

$$x^2 + 8x + 3 = 0$$

$$3 \text{ を移項して, } x^2 + 8x = (\text{ ① })$$

$$4^2 \text{ を両辺に加えて, } x^2 + 8x + 4^2 = (\text{ ② }) + 4^2$$

$$\text{左辺を因数分解して, 右辺をまとめると, } (x + (\text{ ③ }))^2 = (\text{ ④ })$$

$$x + (\text{ ③ }) = \pm (\text{ ⑤ })$$

$$x = (\text{ ⑥ })$$

[解答欄]

① -3	② -3	③ 4
④ 13	⑤ $\sqrt{13}$	⑥ $-4 \pm \sqrt{13}$

[問題 5]

二次方程式 $x^2 + 8x - 1 = 0$ を $(x+m)^2 = n$ の形に変形して次のように解きました。

() にあてはまる数を求めなさい。

$$x^2 + 8x - 1 = 0$$

$$x^2 + 8x = 1$$

$$x^2 + 8x + (\text{ ① })^2 = 1 + (\text{ ① })^2$$

$$(x+4)^2 = (\text{ ② })$$

$$x+4 = \pm (\text{ ③ })$$

$$x = -4 \pm (\text{ ③ })$$

[解答欄]

① 4	② 17	③ $\sqrt{17}$
-------	--------	---------------

[解説]

まず、 $x^2 + 8x - 1 = 0$ の定数 -1 を右辺に移項して、 $x^2 + 8x = 1$

ここで、 $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$ の公式を使って、左辺を $(\quad)^2$ の形に変形する。

$8x$ の係数 8 を 2 で割ると 4 であるので、 4^2 を両辺に加えると、 $x^2 + 8x + 4^2 = 1 + 4^2$

すると左辺は $(\quad)^2$ の形に変形でき、 $(x + 4)^2 = 17$ となる。

よって、 $x + 4 = \pm\sqrt{17}$ ゆえに、 $x = -4 \pm \sqrt{17}$

[問題 6]

$x^2 + 6x - 1 = 0$ を左辺を平方の形にして解きなさい。

[解答欄]

$$x = -3 \pm \sqrt{10}$$

[解説]

まず $x^2 + 6x - 1 = 0$ の定数項 -1 を右辺に移項して、 $x^2 + 6x = 1$

左辺を $(x + a)^2$ に変形することを考える。 $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ の a にあたる数は

x の項の係数を 2 でわって求めることができる。 $6 \div 2 = 3$ 3 の 2 乗を $x^2 + 6x = 1$ の

両辺に加えて、 $x^2 + 6x + 3^2 = 1 + 3^2$, $(x + 3)^2 = 10$

よって $x + 3 = \pm\sqrt{10}$ ゆえに $x = -3 \pm \sqrt{10}$

[問題 7]

解の公式を使って、次の方程式を解け。

(1) $x^2 + 5x + 2 = 0$

(2) $x^2 + 9x + 5 = 0$

(3) $x^2 - 11x + 8 = 0$

(4) $x^2 - x - 5 = 0$

[解答欄]

(1) $x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$	(2) $x = \frac{-9 \pm \sqrt{61}}{2}$	(3) $x = \frac{11 \pm \sqrt{89}}{2}$
(4) $x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$		

[解説]

<Point> 解の公式

二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は、 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

参考までに、解の公式を導いておく。

$ax^2 + bx + c = 0$ の両辺を a で割ると、 $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}, \quad x^2 + 2\frac{b}{2a}x = -\frac{c}{a}, \quad x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}, \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\text{よって, } x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{ゆえに, } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(1) $x^2 + 5x + 2 = 0$ なので, $a=1, b=5, c=2$ として,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 8}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

(2) $x^2 + 9x + 5 = 0$ なので, $a=1, b=9, c=5$ として,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 20}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{61}}{2}$$

(3) $x^2 - 11x + 8 = 0$ なので, $a=1, b=-11, c=8$ として,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \times 1 \times 8}}{2 \times 1} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 32}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{89}}{2}$$

(4) $x^2 - x - 5 = 0$ なので, $a=1, b=-1, c=-5$ として,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-5)}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 20}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

[問題 8]

解の公式を使って, 次の方程式を解け。

(1) $x^2 + 6x + 1 = 0$

(2) $x^2 + 8x + 3 = 0$

(3) $x^2 - 6x + 4 = 0$

(4) $x^2 - 8x + 3 = 0$

[解答欄]

(1) $x = -3 \pm 2\sqrt{2}$	(2) $x = -4 \pm \sqrt{13}$	(3) $x = 3 \pm \sqrt{5}$
(4) $x = 4 \pm \sqrt{13}$		

[解説]

<Point> 二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

b が偶数のときは約分できる。

(1) $x^2 + 6x + 1 = 0$ なので, $a=1, b=6, c=1$ として,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{16 \times 2}}{2}$$

$$= \frac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = \frac{2(-3 \pm 2\sqrt{2})}{2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$$

(2) $x^2 + 8x + 3 = 0$ なので, $a = 1, b = 8, c = 3$ として,

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 12}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{52}}{2} \\ &= \frac{-8 \pm \sqrt{4 \times 13}}{2} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{13}}{2} = \frac{2(-4 \pm \sqrt{13})}{2} = -4 \pm \sqrt{13} \end{aligned}$$

(3) $x^2 - 6x + 4 = 0$ なので, $a = 1, b = -6, c = 4$ として,

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{4 \times 5}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2} = \frac{2(3 \pm \sqrt{5})}{2} = 3 \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

(4) $x^2 - 8x + 3 = 0$ なので, $a = 1, b = -8, c = 3$ として,

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 12}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{52}}{2} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{4 \times 13}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{13}}{2} = \frac{2(4 \pm \sqrt{13})}{2} = 4 \pm \sqrt{13} \end{aligned}$$