

第 5 章	数学(3 年)	名前:	日 付	No.03
	二次方程式の計算			

[問題 1]

次の 2 次方程式を解きなさい。

- (1) $3x^2 = 48$ (2) $2x^2 - 24 = 0$ (3) $(x-1)^2 - 9 = 0$
- (4) $(x+3)^2 - 8 = 0$ (5) $x^2 + 4x = 0$ (6) $x^2 + 7x + 6 = 0$
- (7) $x^2 - 8x + 15 = 0$ (8) $x^2 - 18x + 81 = 0$

[解答欄]

(1) $x = \pm 4$	(2) $x = \pm 2\sqrt{3}$	(3) $x = -2, 4$
(4) $x = -3 \pm 2\sqrt{2}$	(5) $x = -4, 0$	(6) $x = -6, -1$
(7) $x = 3, 5$	(8) $x = 9$	

[解説]

* (1), (2) 式を変形して $x^2 = a$, $x = \pm\sqrt{a}$

(1) $3x^2 = 48$, $x^2 = 16$, $x = \pm 4$

(2) $2x^2 - 24 = 0$, $2x^2 = 24$, $x^2 = 12$, $x = \pm\sqrt{12} = \pm\sqrt{4 \times 3} = \pm 2\sqrt{3}$

* (3), (4) 式を整理して $(x+b)^2 = a$, $x+b = \pm\sqrt{a}$, $x = -b \pm \sqrt{a}$

(3) $(x-1)^2 - 9 = 0$, $(x-1)^2 = 9$, $x-1 = \pm 3$ $x-1 = -3$ のとき $x = -2$,

$x-1 = 3$ のとき $x = 4$

(4) $(x+3)^2 - 8 = 0$, $(x+3)^2 = 8$, $x+3 = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$, $x = -3 \pm 2\sqrt{2}$

* (5)~(8) 因数分解で $A \times B = 0$ の形にする。 $A \times B = 0$ より $A = 0$ か $B = 0$

(5) $x^2 + 4x = 0$ の左辺を共通因数 x でくくると, $x(x+4) = 0$ なので, $x = 0$, $x+4 = 0$
ゆえに, $x = 0, -4$

(6) かけて 6, 加えて 7 になる 2 数は 6, 1 なので, $x^2 + 7x + 6 = 0$ の左辺を因数分解
して, $(x+6)(x+1) = 0$, よって $x+6 = 0$, $x+1 = 0$, ゆえに, $x = -6, -1$

(7) かけて 15, 加えて -8 になる 2 数は -3, -5 なので, $x^2 - 8x + 15 = 0$ の左辺を
因数分解すると, $(x-3)(x-5) = 0$ よって $x-3 = 0$, $x-5 = 0$ ゆえに, $x = 3, 5$

(8) * $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ の公式を使って $x^2 - 18x + 81 = 0$ の左辺を因数分解する

と, $(x-9)^2 = 0$ よって $x-9 = 0$ ゆえに $x = 9$

[問題 2]

次の二次方程式を解きなさい。

(1) $3x^2 = 54$

(2) $x^2 + 6x - 72 = 0$

(3) $x^2 - 12x + 36 = 0$

(4) $16x^2 - 7 = 0$

(5) $3x^2 = 6x$

(6) $(x-3)^2 = 64$

(7) $x^2 - 3x - 40 = 0$

(8) $(x-2)(x-4) = 4x^2 - 1$

(9) $7(x+10)^2 - 56 = 0$

[解答欄]

(1) $x = \pm 3\sqrt{2}$	(2) $x = -12, 6$	(3) $x = 6$
(4) $x = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$	(5) $x = 0, 2$	(6) $x = -5, 11$
(7) $x = -5, 8$	(8) $x = -3, 1$	(9) $x = -10 \pm 2\sqrt{2}$

[解説]

(1) $3x^2 = 54, x^2 = 18, x = \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$

(2) かけて -72 , 加えて 6 になる 2 数は $12, -6$ なので, $x^2 + 6x - 72 = 0$ の左辺を因数分解すると, $(x+12)(x-6) = 0$ よって, $x+12=0, x-6=0$ ゆえに, $x = -12, 6$

(3) $x^2 - 12x + 36 = 0$ を因数分解すると, $(x-6)^2 = 0$ よって, $x-6=0, x=6$

(4) $16x^2 - 7 = 0, 16x^2 = 7, x^2 = \frac{7}{16}, x = \pm \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{16}} = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$

(5) $3x^2 = 6x, x^2 = 2x, x^2 - 2x = 0, x(x-2) = 0$ よって, $x=0, x-2=0$
ゆえに, $x = 0, 2$

(6) $(x-3)^2 = 64, x-3 = \pm 8, x = \pm 8 + 3, x = -5, 11$

(7) かけて -40 , 加えて -3 になる 2 数は $5, -8$ なので, $x^2 - 3x - 40 = 0$ の左辺を因数分解すると, $(x+5)(x-8) = 0$ よって, $x+5=0, x-8=0$ ゆえに, $x = -5, 8$

(8) $(x-2)(x-4) = 4x^2 - 1$ より, $x^2 - 6x + 8 - 4x^2 + 1 = 0, -3x^2 - 6x + 9 = 0$

$x^2 + 2x - 3 = 0$ かけて -3 , 加えて 2 になる 2 数は $3, -1$ なので, $x^2 + 2x - 3 = 0$ の左辺を因数分解すると, $(x+3)(x-1) = 0$ よって, $x+3=0, x-1=0$

ゆえに, $x = -3, 1$

(9) $7(x+10)^2 - 56 = 0, (x+10)^2 - 8 = 0, (x+10)^2 = 8$ よって, $x+10 = \pm\sqrt{8}$

$x+10 = \pm 2\sqrt{2}, x = -10 \pm 2\sqrt{2}$

[問題 3]

次の方程式を解きなさい。

(1) $3x^2 - 1 = 0$

(2) $(x+2)^2 - 4 = 0$

(3) $x^2 - 4x - 12 = 0$

(4) $x^2 - 4x = 0$

(5) $x^2 + 5x + 6 = 0$

(6) $(x+5)(x-2) = (x-2)$

[解答欄]

(1) $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$	(2) $x = -4, 0$	(3) $x = -2, 6$
(4) $x = 0, 4$	(5) $x = -3, -2$	(6) $x = -4, 2$

[解説]

(1) *式を変形して $x^2 = a$, $x = \pm\sqrt{a}$

$$3x^2 - 1 = 0, \quad 3x^2 = 1, \quad x^2 = \frac{1}{3} \quad \text{ゆえに } x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(2) *式を整理して $(x+b)^2 = a$, $x+b = \pm\sqrt{a}$, $x = -b \pm \sqrt{a}$

$$(x+2)^2 - 4 = 0, \quad (x+2)^2 = 4, \quad x+2 = \pm 2 \quad x+2 = -2 \text{ のとき } x = -4$$

$$x+2 = 2 \text{ のとき } x = 0 \quad \text{ゆえに } x = -4, 0$$

* (3)~(6) 因数分解で $A \times B = 0$ の形にする。 $A \times B = 0$ が成りたつのは $A = 0$ か $B = 0$ のとき。

(3) かけて -12 , 加えて -4 になる 2 数は $2, -6$ なので, $x^2 - 4x - 12 = 0$ の左辺を

$$\text{因数分解すると, } (x+2)(x-6) = 0 \quad \text{よって } x+2 = 0, x-6 = 0 \quad \text{ゆえに } x = -2, 6$$

(4) $x^2 - 4x = 0$ の左辺について共通因数 x をくくり出すと, $x(x-4) = 0$

$$\text{よって } x = 0, x-4 = 0 \quad \text{ゆえに } x = 0, 4$$

(5) かけて 6 , 加えて 5 になる 2 数は $3, 2$ なので, $x^2 + 5x + 6 = 0$ の左辺を因数分解

$$\text{すると, } (x+3)(x+2) = 0 \quad \text{よって } x+3 = 0, x+2 = 0 \quad \text{ゆえに } x = -3, -2$$

(6) まず, $(x+5)(x-2) = (x-2)$ の式を整理する。 $x^2 + 3x - 10 = x - 2$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \quad \text{かけて } -8, \text{ 加えて } 2 \text{ になる 2 数は } 4, -2 \text{ なので,}$$

$$(x+4)(x-2) = 0 \quad \text{よって } x+4 = 0, x-2 = 0 \quad \text{ゆえに } x = -4, 2$$

[問題 4]

次の 2 次方程式を解きなさい。

(1) $x^2 + x - 6 = 0$

(2) $x^2 + x = 0$

(3) $x^2 - 6 = 0$

(4) $(x+1)^2 = 4$

(5) $(2x-1)^2 = 12$

(6) $2x^2 - 7 = (x+2)(x-8)$

[解答欄]

(1) $x = -3, 2$	(2) $x = -1, 0$	(3) $x = \pm\sqrt{6}$
(4) $x = -3, 1$	(5) $x = \frac{1 \pm 2\sqrt{3}}{2}$	(6) $x = -3$

[解説]

* (1), (2) 因数分解で $A \times B = 0$ の形に。 $A \times B = 0$ が成りたつのは $A = 0$ か $B = 0$ のとき。

(1) かけて -6 , 加えて 1 になるのは $3, -2$ なので, $x^2 + x - 6 = 0$ の左辺を因数分解して,

$$(x+3)(x-2) = 0 \quad \text{よって } x+3=0, x-2=0 \quad \text{ゆえに } x=-3, 2$$

(2) $x^2 + x = 0$ の左辺を共通因数 x でくくりだして因数分解すると, $x(x+1) = 0$

$$\text{よって } x=0, x+1=0 \quad \text{ゆえに } x=0, -1$$

* (3)~(5) は $A^2 = a, A = \pm\sqrt{a}$ で解く。

(3) $x^2 - 6 = 0, x^2 = 6$ ゆえに, $x = \pm\sqrt{6}$

(4) $(x+1)^2 = 4, x+1 = 2, -2$ よって $x+1 = 2$ のとき $x=1, x+1 = -2$ のとき $x=-3$

(5) $(2x-1)^2 = 12, 2x-1 = \pm\sqrt{12} \quad 2x = 1 \pm 2\sqrt{3} \quad \text{ゆえに } x = \frac{1 \pm 2\sqrt{3}}{2}$

(6) まず式を展開整理する。 $2x^2 - 7 = (x+2)(x-8), 2x^2 - 7 = x^2 - 6x - 16$

$$2x^2 - 7 - x^2 + 6x + 16 = 0, x^2 + 6x + 9 = 0, (x+3)^2 = 0 \quad \text{よって } x+3=0$$

$$\text{ゆえに } x = -3$$

[問題 5]

次の 2 次方程式を解きなさい。

(1) $x^2 + 3x + 2 = 0$

(2) $a^2 - 4a + 4 = 0$

(3) $3y^2 - 21y + 36 = 0$

(4) $x^2 = 2x + 15$

(5) $6x^2 = -24x$

(6) $9x^2 = 7$

(7) $(x-3)^2 = 4$

(8) $(x+2)^2 = 5x + 6$

(9) $x^2 + 6x - 7 = 0$

[解答欄]

(1) $x = -1, -2$	(2) $a = 2$	(3) $y = 3, 4$
(4) $x = -3, 5$	(5) $x = -4, 0$	(6) $x = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}$
(7) $x = 1, 5$	(8) $x = -1, 2$	(9) $x = -7, 1$

[解説]

* 因数分解で $A \times B = 0$ の形にする。 $A \times B = 0$ が成りたつのは $A = 0$ か $B = 0$ のとき。

(1) かけて 2 , 加えて 3 になる 2 数は $1, 2$ なので, $x^2 + 3x + 2 = 0$ の左辺を因数分解すると,
 $(x+1)(x+2) = 0$ よって, $x+1=0, x+2=0$ ゆえに, $x=-1, -2$

(2) $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ の公式を使って $a^2 - 4a + 4 = 0$ の左辺を因数分解すると,

$$(a-2)^2 = 0 \quad \text{よって, } a-2=0 \quad \text{ゆえに, } a=2$$

(3) $3y^2 - 21y + 36 = 0$ の両辺を 3 で割ると, $y^2 - 7y + 12 = 0$

かけて 12 , 加えて -7 になる 2 数は $-3, -4$ なので, $y^2 - 7y + 12 = 0$ の左辺を因数分解すると,
 $(y-3)(y-4) = 0$ よって, $y-3=0, y-4=0$ ゆえに, $y=3, 4$

(4) $x^2 = 2x + 15$ の右辺を左辺に移項すると, $x^2 - 2x - 15 = 0$

かけて -15 , 加えて -2 になる 2 数は $-5, 3$ なので, $x^2 - 2x - 15 = 0$ の左辺を因数分解すると,
 $(x-5)(x+3) = 0$ よって, $x-5=0, x+3=0$ ゆえに, $x=5, -3$

(5) $6x^2 = -24x$ より, $6x^2 + 24x = 0, x^2 + 4x = 0, x(x+4) = 0$

よって, $x=0, x+4=0$ ゆえに, $x=0, -4$

* (6), (7): 式を変形して $x^2 = a, x = \pm\sqrt{a}$

(6) $9x^2 = 7$ より, $x^2 = \frac{7}{9}, x = \pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{9}} = \pm\frac{\sqrt{7}}{3}$

(7) $(x-3)^2 = 4$ より, $x-3 = \pm 2$ よって, $x = \pm 2 + 3, x = 5, 1$

(8) $(x+2)^2 = 5x+6$ より, $x^2 + 4x + 4 - 5x - 6 = 0, x^2 - x - 2 = 0$

かけて -2 , 加えて -1 になる 2 数は $1, -2$ なので, $x^2 - x - 2 = 0$ の左辺を因数分解すると,
 $(x+1)(x-2) = 0$ よって, $x+1=0, x-2=0$ ゆえに, $x=-1, 2$

(9) かけて -7 , 加えて 6 になる 2 数は $7, -1$ なので, $x^2 + 6x - 7 = 0$ の左辺を因数分解すると,
 $(x+7)(x-1) = 0$ よって, $x+7=0, x-1=0$ ゆえに, $x=-7, 1$

[問題 6]

次の問いに答えなさい。

(1) $5x^2 = 60$ を解きなさい。

(2) $(x-3)^2 = 4$ を解きなさい。

(3) $x^2 + 4x + 1 = 0$ を解きなさい。

(4) $x^2 - 3x - 28 = 0$ を解きなさい。

(5) $14x - 49 = x^2$ を解きなさい。

(6) $2(x-3)(x+2) = x(x+3) - 12$ を解きなさい。

[解答欄]

(1) $x = \pm 2\sqrt{3}$	(2) $x = 5, 1$	(3) $x = -2 \pm \sqrt{3}$
(4) $x = -4, 7$	(5) $x = 7$	(6) $x = 0, 5$

[解説]

(1) * 式を変形して $x^2 = a, x = \pm\sqrt{a}$

$5x^2 = 60, x^2 = 12$ ゆえに $x = \pm\sqrt{12} = \pm\sqrt{4 \times 3} = \pm 2\sqrt{3}$

(2) $(x-3)^2 = 4$ より $x-3 = \pm 2$ $x-3=2$ のとき $x=5, x-3=-2$ のとき $x=1$

(3) 因数分解することができないので, 式を $(x+b)^2 = a$ の形に変形して解く。

まず, $x^2 + 4x + 1 = 0$ の定数項 1 を右辺に移項して, $x^2 + 4x = -1 \cdots \textcircled{1}$

左辺を $(x+b)^2$ の形に変形する。 $x^2 + 4x = x^2 + 2 \times x \times 2$ なので $2^2 = 4$ を $\textcircled{1}$ の両辺に加える。

$x^2 + 4x + 4 = -1 + 4, (x+2)^2 = 3$ よって $x+2 = \pm\sqrt{3},$ ゆえに $x = -2 \pm \sqrt{3}$

(4) かけて -28 , 加えて -3 になる 2 数は $4, -7$ なので, $x^2 - 3x - 28 = 0$ の左辺を因数分解して
 $(x+4)(x-7) = 0$ よって $x+4=0, x-7=0$ ゆえに $x = -4, 7$

(5) $14x - 49 = x^2$, $x^2 - 14x + 49 = 0$ * $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ の公式を使って

$$(x - 7)^2 = 0 \quad \text{よって } x - 7 = 0 \quad \text{ゆえに } x = 7$$

(6) $2(x - 3)(x + 2) = x(x + 3) - 12$, $2(x^2 - x - 6) = x^2 + 3x - 12$

$$2x^2 - 2x - 12 - x^2 - 3x + 12 = 0, \quad x^2 - 5x = 0$$

$$x(x - 5) = 0 \quad \text{よって } x = 0, \quad x - 5 = 0 \quad \text{ゆえに } x = 0, 5$$

[問題 7]

等式 $(\sqrt{3}a + b)^2 - (\sqrt{3}b - a)^2 + (b - \sqrt{3}a)^2 - (a + \sqrt{3}b)^2 = 36 - (2b + a)(2b - a)$ を満たす正の数 a の値を求めなさい。

[解答欄]

$$a = 2\sqrt{3}$$

[解説]

まず、等式を整理すると、

$$(\sqrt{3}a + b)^2 - (\sqrt{3}b - a)^2 + (b - \sqrt{3}a)^2 - (a + \sqrt{3}b)^2 = 36 - (2b + a)(2b - a)$$

$$3a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2 - (3b^2 - 2\sqrt{3}ab + a^2) + (b^2 - 2\sqrt{3}ab + 3a^2) - (a^2 + 2\sqrt{3}ab + 3b^2) = 36 - (4b^2 - a^2)$$

$$3a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2 - 3b^2 + 2\sqrt{3}ab - a^2 + b^2 - 2\sqrt{3}ab + 3a^2 - a^2 - 2\sqrt{3}ab - 3b^2 = 36 - 4b^2 + a^2$$

$$4a^2 - 4b^2 = 36 - 4b^2 + a^2 \quad \text{よって, } 3a^2 = 36, \quad a^2 = 12$$

$$a > 0 \text{ なので, } a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$