

第 6 章	数学(3 年)	名前:	日 付	No.01
	二次方程式応用			

[問題 1]

2 次方程式 $x^2 + 2x - a = 0$ の 1 つの解が -3 であるとき、 a の値を求めなさい。また、もう 1 つの解を求めなさい。

[解答欄]

$$a = 3, \text{ 他の解は } x = 1$$

[解説]

$x^2 + 2x - a = 0 \cdots \textcircled{1}$ の解の 1 つが -3 であるので、 $x = -3$ を $\textcircled{1}$ の左辺に代入しても $\textcircled{1}$ の等式が成り立つ。

$x^2 + 2x - a = 0$ に $x = -3$ を代入すると、 $9 - 6 - a = 0$ ゆえに $a = 3$

$x^2 + 2x - a = 0$ に $a = 3$ を代入すると $x^2 + 2x - 3 = 0$

かけて -3 、加えて 2 になる 2 数は $-1, 3$ なので、 $(x - 1)(x + 3) = 0$

よって $x - 1 = 0, x + 3 = 0$ ゆえに $x = -3, 1$

以上より $a = 3$ 、他の解は $x = 1$

[問題 2]

二次方程式 $x^2 + ax - 10 = 0$ の解の 1 つが 2 であるとき、 a の値を求めなさい。また、他の解を求めなさい。

[解答欄]

$$a = 3, \text{ 他の解は } x = -5$$

[解説]

$x^2 + ax - 10 = 0 \cdots \textcircled{1}$ の解の 1 つが 2 であるので、 $x = 2$ を $\textcircled{1}$ の左辺に代入しても $\textcircled{1}$ の等式が成り立つ。

$x^2 + ax - 10 = 0$ に $x = 2$ を代入すると、 $4 + 2a - 10 = 0$

$2a - 6 = 0, 2a = 6, a = 3$

次に $x^2 + ax - 10 = 0$ に $a = 3$ を代入すると、 $x^2 + 3x - 10 = 0$ かけて -10 、加えて 3 になる 2 数は $-2, 5$ よって $(x - 2)(x + 5) = 0, x - 2 = 0, x + 5 = 0$ ゆえに $x = -5, 2$

以上より $a = 3$ 、他の解は -5

[問題 3]

2 次方程式 $x^2 + ax - 7 = 0$ の解が -1 と b であるとき、 a, b の値を求めなさい。

[解答欄]

$$a = -6, b = 7$$

[解説]

$x = -1$ を $x^2 + ax - 7 = 0$ に代入すると、 $1 - a - 7 = 0, a = -6$

$a = -6$ を $x^2 + ax - 7 = 0$ に代入すると、 $x^2 - 6x - 7 = 0, (x + 1)(x - 7) = 0$

$x + 1 = 0, x - 7 = 0$ ゆえに $x = -1, 7$

よって、 $b = 7$

[問題 4]

二次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の 2 つの解が $x = 2, 5$ であるとき, a, b の値を求めなさい。

[解答欄]

$$a = -7, b = 10$$

[解説]

$$x^2 + ax + b = 0 \text{ に } x = 2 \text{ を代入すると, } 4 + 2a + b = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } x = 5 \text{ を代入すると, } 25 + 5a + b = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ で } b \text{ を消去すると, } 21 + 3a = 0, 3a = -21, a = -7$$

$$\textcircled{1} \text{ に } a = -7 \text{ を代入すると, } 4 - 14 + b = 0 \text{ よって } b = 10$$

$$\text{ゆえに } a = -7, b = 10$$

$$* (\text{別解}) \ x = 2, 5 \text{ を 2 解とする 2 次方程式は } (x-2)(x-5) = 0, x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$\text{ゆえに } a = -7, b = 10$$

[問題 5]

2 次方程式 $x^2 - ax + 3 = 0$ の解の 1 つが, 2 次方程式 $x^2 - 6x + 9 = 0$ の解と等しいとき, a の値を求めなさい。また, 2 次方程式 $x^2 - ax + 3 = 0$ の他の解も求めなさい。

[解答欄]

$$a = 4, \text{ 他の解は } x = 1$$

[解説]

まず, $x^2 - 6x + 9 = 0$ を解く。 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ の公式を使って左辺を因数分解すると,

$$(x-3)^2 = 0, \text{ ゆえに } x = 3$$

$x^2 - ax + 3 = 0$ の解の 1 つが $x = 3$ なので,

$$x = 3 \text{ を } x^2 - ax + 3 = 0 \text{ に代入すると, } 9 - 3a + 3 = 0, -3a + 12 = 0, -3a = -12$$

$$\text{ゆえに } a = 4$$

$x^2 - ax + 3 = 0$ に $a = 4$ を代入すると, $x^2 - 4x + 3 = 0$, かけて 3, 加えて -4 になる 2 数は -1, -3 なので $(x-1)(x-3) = 0$ よって $x-1=0, x-3=0$ ゆえに $x = 1, 3$

以上より, $a = 4$, 他の解は $x = 1$

[問題 6]

2 次方程式 $x^2 + ax + 6 = 0$ の 2 つの解が負の整数であるとき、 a の値をすべて求めなさい。

[解答欄]

$a = 5, 7$

[解説]

かけて 6 になる 2 整数の組み合わせは、 $(1, 6)$, $(-1, -6)$, $(2, 3)$, $(-2, -3)$

よって、考えられる式は、

$$(x-1)(x-6)=0, (x+1)(x+6)=0, (x-2)(x-3)=0, (x+2)(x+3)=0$$

このうち、2 つの解が負になるのは、 $(x+1)(x+6)=0$ と $(x+2)(x+3)=0$

$$(x+1)(x+6)=0 \text{ の左辺を展開すると、} x^2 + 7x + 6 = 0 \text{ よって、} a = 7$$

$$(x+2)(x+3)=0 \text{ の左辺を展開すると、} x^2 + 5x + 6 = 0 \text{ よって、} a = 5$$

ゆえに、 $a = 5, 7$

[問題 7]

次の問いに答えなさい。

(1) 二次方程式 $x^2 - 2x - 15 = 0$ の負の解が、二次方程式 $x^2 + ax - 2a + 6 = 0$ の解の 1 つになっている。このとき、 a の値を求めなさい。

(2) n を正の整数とすると、 x についての二次方程式 $x^2 - nx + 12 = 0$ の 2 つの解が、どちらも正の整数になったという。このとき、 n の値をすべて求めなさい。

[解答欄]

(1) $a = 3$	(2) $n = 13, 8, 7$
-------------	--------------------

[解説]

(1) まず二次方程式 $x^2 - 2x - 15 = 0 \cdots \textcircled{1}$ を解くために左辺を因数分解する。かけて -15 , 加えて -2 になる 2 数は $-5, 3$ なので、 $(x-5)(x+3)=0$ よって $x-5=0$ または $x+3=0$ ゆえに $x=5, -3$

このうちの負の解 $x=-3$ は $x^2 + ax - 2a + 6 = 0 \cdots \textcircled{2}$ の解の 1 つにもなっているため、 $x=-3$ を $\textcircled{2}$ に代入して、 $9-3a-2a+6=0$ が成り立つ。 a についての方程式として解くと、 $-5a=-15$ ゆえに $a=3$

(2) 二次方程式 $x^2 - nx + 12 = 0 \cdots \textcircled{1}$ の 2 つの解を a, b とする。 $x=a, b$ を解とする二次方程式は $(x-a)(x-b)=0$ で、展開すると $x^2 + (-a-b)x + ab = 0 \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の式はまったく同じものになるはずなので、 x の項の係数、定数項も同じになる。

よって $-n = -a - b$, $n = a + b \cdots \textcircled{3}$ $12 = ab \cdots \textcircled{4}$ が成り立つ。 a, b は正の整数なので、かけて 12 になる組み合わせは、 $(1, 12)$, $(2, 6)$, $(3, 4)$ の 3 通り

$$(1, 12) \text{ のとき } n = a + b = 1 + 12 = 13, (2, 6) \text{ のとき } n = a + b = 2 + 6 = 8$$

$$(3, 4) \text{ のとき } n = a + b = 3 + 4 = 7$$

ゆえに $n = 13, 8, 7$

[問題 8]

次の問いに答えよ。

- (1) 2 次方程式 $x^2 - 26x - 120 = 0$ の解のうち、大きい方の解を a 、小さい方の解を b とするとき、 $a - 2b$ の値を求めよ。
- (2) 2 次方程式 $3x^2 - 39x + 36 = 0$ の解のうち、大きい方の解が 2 次方程式 $x^2 - 5x - a = 0$ の解であるとき a の値を求めよ。

[解答欄]

(1) 38	(2) $a = 84$
--------	--------------

[解説]

$$(1) x^2 - 26x - 120 = 0, (x - 30)(x + 4) = 0, x = 30, -4$$

よって $a = 30, b = -4$ ゆえに $a - 2b = 30 + 8 = 38$

$$(2) 3x^2 - 39x + 36 = 0, x^2 - 13x + 12 = 0, (x - 1)(x - 12) = 0, x = 1, 12$$

$x = 12$ を $x^2 - 5x - a = 0$ に代入すると、 $144 - 60 - a = 0$ ゆえに $a = 84$

[問題 9]

2 次方程式 $x^2 - ax + 48 = 0$ の 2 つの解が正の整数であるとき、 a の最小の値を求めなさい。

[解答欄]

14

[解説]

(少し難しい問題)

2 次方程式 $x^2 - ax + 48 = 0 \cdots \textcircled{1}$ の 2 つの解を m, n とすると、条件より m, n は正の整数。 m, n を 2 解とする二次方程式は $(x - m)(x - n) = 0$ と表すことができる。

$$(x - m)(x - n) = 0 \text{ を展開すると, } x^2 + (-m - n)x + mn = 0 \cdots \textcircled{2}$$

①と②の式はまったく同じ式にならないといけないので、

$$x \text{ の項の係数を比較して, } -a = -m - n, a = m + n$$

$$\text{定数項を比較して, } mn = 48$$

$nm = 48$ になる正の数 n, m の組み合わせの中で $a = n + m$ が最小になるのは、

$$(n, m) = (6, 8), (8, 6) \text{ このとき } a = 6 + 8 = 14$$

[問題 10]

ある正の整数から 4 をひいて、これにもとの整数をかけると 32 になるという。もとの整数を x として方程式を作り求めなさい。

[解答欄]

$(x - 4) \times x = 32, x^2 - 4x - 32 = 0$ かけて -32 , 加えて -4 になる 2 数は $-8, 4$ なので $(x - 8)(x + 4) = 0$ よって $x - 8 = 0, x + 4 = 0$ ゆえに $x = 8, -4$ $x > 0$ なので、 $x = 8$ よってもとの数は $8 \cdots$ 答
--

[問題 11]

ある正の数に 5 を加え、これにもとの数をかけると 24 になる。もとの数を求めなさい。

[解答欄]

正の数を x とすると、 $(x+5) \times x = 24$, $x^2 + 5x - 24 = 0$

かけて -24 , 加えて 5 になる 2 数は $-3, 8$ なので、 $(x-3)(x+8) = 0$

よって $x-3=0$, $x+8=0$ ゆえに $x=3, -8$

$x > 0$ なので、 $x=3$

よって、もとの数は $3 \cdots$ 答