

第 8 章	数学(3 年)	名前:	日 付	No.01
	二次関数変域割合			

[問題 1]

関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ について、 x の変域が次のときの y の変域を求めなさい。

① $2 \leq x \leq 6$

② $-4 \leq x \leq 1$

[解答欄]

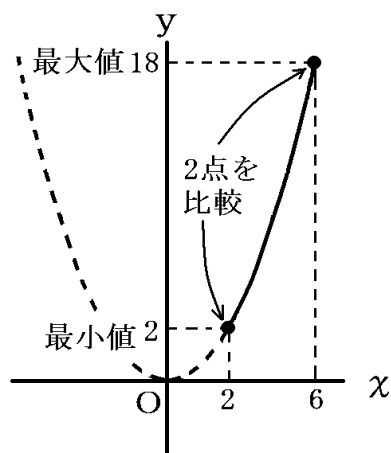
① $2 \leq y \leq 18$	② $0 \leq y \leq 8$
----------------------	---------------------

[解説]

① * $x = 0$ が x の変域内にないときは 2 点と比較 $x = 0$ は $2 \leq x \leq 6$ の範囲内にないので、 $x = 2, 6$ のときの y の値を比較する。

$$x = 2 \text{ のとき } y = \frac{1}{2} \times 2^2 = 2$$

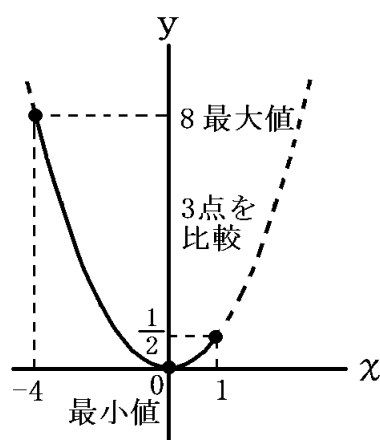
$$x = 6 \text{ のとき } y = \frac{1}{2} \times 6^2 = 18$$

よって最小値は $y = 2$ ，最大値は $y = 18$ ゆえに $2 \leq y \leq 18$ ② * $x = 0$ が x の変域内にあるときは 3 点と比較 $x = 0$ が $-4 \leq x \leq 1$ の変域内にあるので、 $x = 0, -4, 1$ のときの y の値を比較する。

$$x = 0 \text{ のとき } y = 0$$

$$x = -4 \text{ のとき } y = \frac{1}{2} \times (-4)^2 = 8$$

$$x = 1 \text{ のとき } y = \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{2}$$

よって最小値は $y = 0$ ，最大値は $y = 8$ ゆえに $0 \leq y \leq 8$ 

[問題 2]

関数 $y = -2x^2$ で、 x の変域が $-3 \leq x \leq 2$ のときの y の変域を求めなさい。

[解答欄]

$$-18 \leq y \leq 0$$

[解説]

$x = 0$ が x の変域内にあるときは 3 点と比較

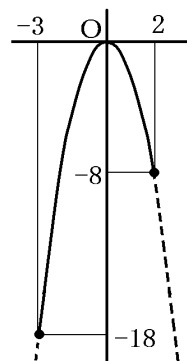
$x = 0$ のとき、 $y = 0$

$x = -3$ のとき、 $y = -2 \times (-3)^2 = -18$

$x = 2$ のとき、 $y = -2 \times 2^2 = -8$

よって、 y の変域は

$$-18 \leq y \leq 0$$



[問題 3]

関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ で、 x の変域が $-6 \leq x \leq 3$ のときの y の変域を求めなさい。

[解答欄]

$$0 \leq y \leq 18$$

[解説]

$x = 0$ は $-6 \leq x \leq 3$ の範囲内にあるので、 $x = 0, -6, 3$ のときの y の値を比較する。

$x = 0$ のとき $y = 0$ ， $x = -6$ のとき $y = \frac{1}{2} \times (-6)^2 = 18$ ， $x = 3$ のとき $y = \frac{1}{2} \times 3^2 = \frac{9}{2}$

よって最小値は $y = 0$ ，最大値は $y = 18$ ゆえに $0 \leq y \leq 18$

[問題 4]

関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ ($-3 \leq x \leq 2$) の y の変域を求めなさい。

[解答欄]

$$0 \leq y \leq 3$$

[解説]

$x = 0$ は $-3 \leq x \leq 2$ の範囲内にあるので、 $x = 0, -3, 2$ のときの y の値を比較する。

$x = 0$ のとき $y = 0$ ， $x = -3$ のとき $y = \frac{1}{3} \times (-3)^2 = 3$ ， $x = 2$ のとき $y = \frac{1}{3} \times 2^2 = \frac{4}{3}$

よって最小値は $y = 0$ ，最大値は $y = 3$ ゆえに $0 \leq y \leq 3$

[問題 5]

次の関数について、 y の変域を求めなさい。

(1) 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ について、 x の変域が $-2 < x \leq 4$ のときの y の変域。

(2) 関数 $y = x^2$ について、 x の変域が $2 \leq x \leq 3$ のときの y の変域。

(3) 関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ について、 x の変域が $-1 \leq x \leq 4$ のときの y の変域。

[解答欄]

(1) $0 \leq y \leq 8$	(2) $4 \leq y \leq 9$	(3) $-8 \leq y \leq 0$
-----------------------	-----------------------	------------------------

[解説]

(1) $x=0$ は $-2 < x \leq 4$ の変域の中。よって、 $x=0, -2, 4$ のときの y の値を求める。

$x=0$ のとき $y=0$ ， $x=-2$ のとき $y = \frac{1}{2} \times (-2)^2 = 2$ ， $x=4$ のとき $y = \frac{1}{2} \times 4^2 = 8$ 。

よって y の最小値は $y=0$ ，最大値は $y=8$ ゆえに $0 \leq y \leq 8$

(2) $x=0$ は $2 \leq x \leq 3$ の変域内にはない。よって、 $x=2, 3$ のときの y の値を求める。

$x=2$ のとき $y=2^2=4$ ， $x=3$ のとき $y=3^2=9$

よって y の最小値は $y=4$ ，最大値は $y=9$ ゆえに $4 \leq y \leq 9$

(3) $x=0$ は $-1 \leq x \leq 4$ の変域の中。よって、 $x=0, -1, 4$ のときの y の値を求める。

$x=0$ のとき $y=0$ ， $x=-1$ のとき $y = -\frac{1}{2} \times (-1)^2 = -\frac{1}{2}$ ，

$x=4$ のとき $y = -\frac{1}{2} \times 4^2 = -8$

よって、最小値は $y=-8$ ，最大値は $y=0$ ゆえに $-8 \leq y \leq 0$

[問題 6]

関数 $y = ax^2$ において、 $x=2$ のとき $y=12$ である。 x の変域が $-4 \leq x \leq -1$ のとき、 y の変域を求めなさい。

[解答欄]

$3 \leq y \leq 48$

[解説]

$y = ax^2$ に $x=2$ ， $y=12$ を代入すると、 $12 = a \times 2^2$ ， $a = 12 \div 4 = 3$

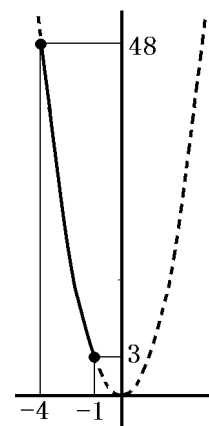
よって、 $y = 3x^2$

$x=0$ は $-4 \leq x \leq -1$ の範囲内にはないので、

$x=-4$ ， -1 のときの y の値を比較する。

$x=-4$ のとき、 $y = 3 \times (-4)^2 = 48$ $x=-1$ のとき、 $y = 3 \times (-1)^2 = 3$

ゆえに、 $3 \leq y \leq 48$



[問題 7]

次の問いに答えなさい。

- (1) 関数 $y = 4x^2$ について、 x の変域が $-3 \leq x \leq 2$ のときの y の変域を求めなさい。
- (2) 関数 $y = ax^2$ について、 x の変域が $-\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{1}{4}$ のときの y の変域が $0 \leq y \leq 1$ であるとき、

a の値を求めなさい。

[解答欄]

(1) $0 \leq y \leq 36$	(2) $a = 16$
------------------------	--------------

[解説] (1) $x = 0$ が x の変域内にあるときは 3 点と比較

$x = 0, -3, 2$ のときの y の値を比較する。

$x = 0$ のとき $y = 0$

$x = -3$ のとき $y = 4 \times (-3)^2 = 36$

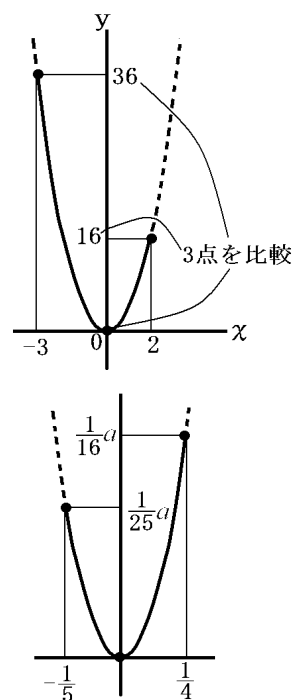
$x = 2$ のとき $y = 4 \times 2^2 = 16$

よって最小値は $y = 0$ ，最大値は $y = 36$ ゆえに $0 \leq y \leq 36$

- (2) 右図のように、 y の値が最大になるのは、 $x = \frac{1}{4}$ のときで、

そのときの y の値は $y = a \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}a$

y の変域が $0 \leq y \leq 1$ なので、 $\frac{1}{16}a = 1$ よって $a = 16$



[問題 8]

関数 $y = ax^2$ について、 x の変域が $-2 \leq x \leq 4$ のとき、 y の変域は $-8 \leq y \leq 0$ となる。このとき a の値を求めなさい。

[解答欄]

$a = -\frac{1}{2}$

[解説]

y の変域が $-8 \leq y \leq 0$ で負の範囲にあるので、比例定数 a は負の値をとる。

$x = 0$ は $-2 \leq x \leq 4$ の変域内にあるので、まず、 $x = 0, -2, 4$ のときの y の値を比較して最大値と最小値を求める。

$x = 0$ のとき $y = a \times 0^2 = 0$ ， $x = -2$ のとき $y = a \times (-2)^2 = 4a$

$x = 4$ のとき $y = a \times 4^2 = 16a$

$a < 0$ なので最小値は $y = 16a$ ，最大値は $y = 0$ ゆえに $16a \leq y \leq 0$

y の変域は $-8 \leq y \leq 0$ と与えられているので、 $16a = -8$ ゆえに $a = -\frac{1}{2}$

[問題 9]

関数 $y = ax^2$ において、 x の変域が $-1 \leq x \leq 2$ のとき、 y の変域は $b \leq y \leq 8$ です。このとき、 a, b の値を求めなさい。

[解答欄]

$$a = 2, b = 0$$

[解説]

y の変域が $b \leq y \leq 8$ と正の範囲にあるので、グラフは上に開いており $a > 0$
 $x = 0$ は $-1 \leq x \leq 2$ の範囲内にあるので、 $x = 0, -1, 2$ のときの y の値を比較する。

$$x = 0 \text{ のとき } y = 0, \quad x = -1 \text{ のとき } y = a \times (-1)^2 = a, \quad x = 2 \text{ のとき } y = a \times 2^2 = 4a$$

$a > 0$ なので、最小値は $y = 0$ 、最大値は $y = 4a$ ゆえに $0 \leq y \leq 4a \cdots \textcircled{1}$

y の変域は $b \leq y \leq 8$ で、 $\textcircled{1}$ と同じになるので、 $b = 0, 4a = 8$ ゆえに $a = 2, b = 0$

[問題 10]

関数 $y = ax^2$ において、 x の変域が $-2 \leq x \leq 3$ のとき、 y の変域が $b \leq y \leq 18$ である。 a, b の値を求めなさい。

[解答欄]

$$a = 2, b = 0$$

[解説]

y の変域が $b \leq y \leq 18$ と正の範囲にあるので、グラフは上に開いており $a > 0$
 $x = 0$ は $-2 \leq x \leq 3$ の範囲内にあるので、 $x = 0, -2, 3$ のときの y の値を比較する。

$$x = 0 \text{ のとき } y = 0, \quad x = -2 \text{ のとき } y = a \times (-2)^2 = 4a, \quad x = 3 \text{ のとき } y = a \times 3^2 = 9a$$

$a > 0$ なので、最小値は $y = 0$ 、最大値は $y = 9a$ ゆえに $0 \leq y \leq 9a \cdots \textcircled{1}$

y の変域は $b \leq y \leq 18$ で、 $\textcircled{1}$ と同じになるので、 $b = 0, 9a = 18$

ゆえに $a = 2, b = 0$