

第 8 章	数学(3 年)	名前:	日 付	No.02
	二次関数変域割合			

[問題 1]

関数 $y = -x^2$ について、 x の変域が $-3 \leq x \leq a$ とき、 y の変域が $-16 \leq y \leq b$ である。

a, b の値を求めなさい。

[解答欄]

$$a = 4, b = 0$$

[解説]

比例定数が負であるので、最小値 -16 をとるのは $x = -3$ か $x = a$ のときである。

$x = -3$ のときは $y = -(-3)^2 = -9$ で最小値にはならない。

ゆえに $x = a$ のときに最小値をとる。 $x = a$ のとき $y = -a^2$ であるので、 $-a^2 = -16$ 、 $a = \pm 4$

ところで $-3 \leq x \leq a$ なので $-3 \leq a$ よって $a = 4$

x の変域が $-3 \leq x \leq 4$ なので、 $x = 0$ のとき最大値 $y = 0$ をとる。

ゆえに $b = 0$

[問題 2]

2 つの関数 $y = 2x + 6$ 、 $y = ax^2$ において、 x の変域が $-3 \leq x \leq 2$ のとき y の変域が一致する。

a の値を求めなさい。

[解答欄]

$$a = \frac{10}{9}$$

[解説]

まず、 x の変域が $-3 \leq x \leq 2$ のときの $y = 2x + 6$ の変域を求める。

$x = -3$ のとき、 $y = 2 \times (-3) + 6 = 0$ 、

$x = 2$ のとき、 $y = 2 \times 2 + 6 = 10$

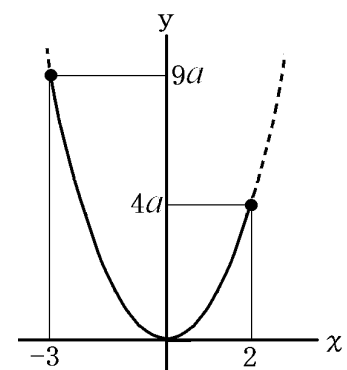
よって、 y の変域は、 $0 \leq y \leq 10$

$y = ax^2$ の変域も $0 \leq y \leq 10$ になる。

右図のように、 $y = ax^2$ の y の値が最大になるのは、

$x = -3$ のときで、

そのときの y の値は $y = a \times (-3)^2 = 9a$ となる



よって、 $9a = 10$ 、 $a = \frac{10}{9}$

[問題 3]

2つの関数 $y = -3x^2$ と $y = ax + b$ (a, b は定数, $a > 0$) は, x の変域が $-1 \leq x \leq 2$ のとき, y の変域が同じになります。このとき, a, b の値を求めなさい。

[解答欄]

$a = 4, b = -8$

[解説]

まず, $y = -3x^2$ の変域を求める。

$x = 0$ は $-1 \leq x \leq 2$ の範囲内にあるので, $x = 0, -1, 2$ のときの y の値を比較する。

$$x = 0 \text{ のとき } y = 0, \quad x = -1 \text{ のとき } y = -3 \times (-1)^2 = -3, \quad x = 2 \text{ のとき } y = -3 \times 2^2 = -12$$

よって最小値は $y = -12$, 最大値は $y = 0$ ゆえに変域は $-12 \leq y \leq 0 \cdots \textcircled{1}$

次に, $y = ax + b$ の変域を求める。

$a > 0$ なので, $x = -1$ のときに最小値 $y = -a + b$, $x = 2$ のときに最大値 $y = 2a + b$ をとる。ゆえに y の変域は $-a + b \leq y \leq 2a + b \cdots \textcircled{2}$

変域①, ②が同じなので,

$$-a + b = -12 \cdots \textcircled{1}$$

$$2a + b = 0 \cdots \textcircled{2}$$

これを a, b の連立方程式として解く。②-①より, $3a = 12$ ゆえに $a = 4$

②に $a = 4$ を代入すると, $2 \times 4 + b = 0$ ゆえに $b = -8$

よって, $a = 4, b = -8$

[問題 4]

x の変域が $-1 \leq x \leq 2$ のとき, $y = x^2$ と $y = ax + b$ ($a > 0$) の y の変域が一致するのは, $a = (\textcircled{1})$, $b = (\textcircled{2})$ のときである。

[解答欄]

① $\frac{4}{3}$	② $\frac{4}{3}$
-----------------	-----------------

[解説]

まず, $y = x^2$ の変域を求める。

$x = 0$ は $-1 \leq x \leq 2$ の変域内にあるので, $x = 0, -1, 2$ のときの y の値を比較して $y = x^2$ の最大値と最小値を求める。

$$x = 0 \text{ のとき } y = 0, \quad x = -1 \text{ のとき } y = (-1)^2 = 1, \quad x = 2 \text{ のとき } y = 2^2 = 4$$

よって $y = x^2$ の最大値は $y = 4$, 最小値は $y = 0$ ゆえに y の変域は $0 \leq y \leq 4 \cdots \textcircled{1}$

次に, $y = ax + b$ の変域を求める。

$a > 0$ なので, 直線は右上がり $x = -1$ のとき最小値 $y = -a + b$

$x = 2$ のとき最大値 $y = 2a + b$ をとる。

ゆえに y の変域は $-a + b \leq y \leq 2a + b \cdots \textcircled{2}$

①と②の変域が一致するので, $-a + b = 0 \cdots \textcircled{3}$, $2a + b = 4 \cdots \textcircled{4}$

これを a, b の連立方程式として解く。④－③より， $3a = 4$ ，ゆえに $a = \frac{4}{3}$

③に $a = \frac{4}{3}$ を代入すると， $-\frac{4}{3} + b = 0$ ゆえに $b = \frac{4}{3}$

[問題 5]

関数 $y = 2x^2$ について， x の値が1から3まで増加するときの変化の割合を求めよ。

[解答欄]

8

[解説]

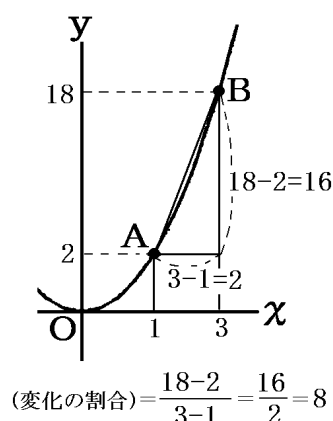
$x = 1$ のとき $y = 2 \times 1^2 = 2$

$x = 3$ のとき $y = 2 \times 3^2 = 18$

$y : 2 \rightarrow 18$ (増加量) $= 18 - 2 = 16$

$x : 1 \rightarrow 3$ (増加量) $= 3 - 1 = 2$

ゆえに，(変化の割合) $= \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{16}{2} = 8$



[問題 6]

関数 $y = -2x^2$ において， x が次のように変わるときの変化の割合をそれぞれ求めなさい。

(1) 1から3

(2) -3から-1

(3) -2から2

[解答欄]

(1) -8

(2) 8

(3) 0

[解説]

(1) $x = 1$ のとき $y = -2 \times 1^2 = -2$ ， $x = 3$ のとき $y = -2 \times 3^2 = -18$

$y : -2 \rightarrow -18$ (増加量) $= -18 - (-2) = -16$

$x : 1 \rightarrow 3$ (増加量) $= 3 - 1 = 2$

ゆえに，(変化の割合) $= \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{-16}{2} = -8$

*(参考)

2乗に比例する関数の変化の割合の簡単な計算方法

$y = ax^2$ で x が p から q に変化するとき，

$$(\text{変化の割合}) = \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{aq^2 - ap^2}{q - p} = \frac{a(q^2 - p^2)}{q - p} = \frac{a(q + p)(q - p)}{q - p} = a(q + p)$$

これを使うと，(変化の割合) $= a(p + q) = -2 \times (1 + 3) = -8$

(2)，(3)はこの簡単な計算方法を使ってみる。

(2) (変化の割合) $= a(p + q) = -2 \times (-3 - 1) = 8$

(3) (変化の割合) $= a(p + q) = -2 \times (-2 + 2) = 0$

*(1)～(3)でわかるように， $y = ax^2$ の場合，変化の割合は一定ではない。

[問題 7]

関数 $y = -\frac{3}{2}x^2$ について、 x の値が 2 から 4 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

[解答欄]

-9

[解説]

$$x = 2 \text{ のとき } y = -\frac{3}{2} \times 2^2 = -6, \quad x = 4 \text{ のとき } y = -\frac{3}{2} \times 4^2 = -24$$

$$y : -6 \rightarrow -24 \quad (\text{増加量}) = -24 - (-6) = -18$$

$$x : 2 \rightarrow 4 \quad (\text{増加量}) = 4 - 2 = 2$$

$$\text{ゆえに, (変化の割合)} = \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{-18}{2} = -9$$

[問題 8]

関数 $y = x^2$ について、次の問いに答えなさい。

- ① x の値が 2 から 5 まで増加するときの y の増加量を求めなさい。
 ② x の値が -4 から -1 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

[解答欄]

① 21	② -5
------	------

[解説]

$$\text{① } (y \text{ の増加量}) = 5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$$

$$\text{② } x = -4 \text{ のとき } y = (-4)^2 = 16, \quad x = -1 \text{ のとき } y = (-1)^2 = 1$$

$$y : 16 \rightarrow 1 \quad (\text{増加量}) = 1 - 16 = -15$$

$$x : -4 \rightarrow -1 \quad (\text{増加量}) = -1 - (-4) = 3$$

$$\text{ゆえに, (変化の割合)} = \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{-15}{3} = -5$$

[問題 9]

次に問いに答えなさい。

- (1) 関数 $y = x^2$ で、 x の値が -3 から -1 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。
 (2) 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ について x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。
 (3) 関数 $y = 2x^2$ について、 x が -3 から 1 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

[解答欄]

(1) -4	(2) 2	(3) -4
--------	-------	--------

[解説]

*2 乗に比例する関数の変化の割合の簡単な計算方法

 $y = ax^2$ で x が p から q に変化するとき,

$$(\text{変化の割合}) = \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{aq^2 - ap^2}{q - p} = \frac{a(q^2 - p^2)}{q - p} = \frac{a(q + p)(q - p)}{q - p} = a(q + p)$$

$$(1) (\text{変化の割合}) = 1 \times (-3 - 1) = -4$$

$$(2) (\text{変化の割合}) = \frac{1}{2} \times (1 + 3) = 2$$

$$(3) (\text{変化の割合}) = 2 \times (-3 + 1) = -4$$

[問題 10]

次の関数について、 x の値が 2 から 4 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

$$(1) y = 3x - \frac{1}{2} \quad (2) y = \frac{8}{x} \quad (3) y = 2x^2 \quad (4) y = -\frac{1}{3}x^2$$

[解答欄]

(1) 3	(2) -1	(3) 12	(4) -2
-------	--------	--------	--------

[解説]

$$(1) x = 2 \text{ のとき } y = 3 \times 2 - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}, \quad x = 4 \text{ のとき } y = 3 \times 4 - \frac{1}{2} = \frac{23}{2}$$

$$\text{よって, } (x \text{ の増加量}) = 4 - 2 = 2 \text{ で, } (y \text{ の増加量}) = \frac{23}{2} - \frac{11}{2} = 6$$

$$\text{ゆえに, } (\text{変化の割合}) = \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{6}{2} = 3$$

*1 次関数 $y = ax + b$ で a は変化の割合を表すので, 計算せずに, $(\text{変化の割合}) = 3$ とだすこともできる。

$$(2) x = 2 \text{ のとき } y = \frac{8}{2} = 4, \quad x = 4 \text{ のとき } y = \frac{8}{4} = 2$$

$$\text{よって, } (x \text{ の増加量}) = 4 - 2 = 2 \text{ で, } (y \text{ の増加量}) = 2 - 4 = -2$$

$$\text{ゆえに, } (\text{変化の割合}) = \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$(3) x = 2 \text{ のとき } y = 2 \times 2^2 = 8, \quad x = 4 \text{ のとき } y = 2 \times 4^2 = 32$$

$$\text{よって, } (x \text{ の増加量}) = 4 - 2 = 2 \text{ で, } (y \text{ の増加量}) = 32 - 8 = 24$$

$$\text{ゆえに, } (\text{変化の割合}) = \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{24}{2} = 12$$

$$(4) x = 2 \text{ のとき } y = -\frac{1}{3} \times 2^2 = -\frac{4}{3}, \quad x = 4 \text{ のとき } y = -\frac{1}{3} \times 4^2 = -\frac{16}{3}$$

$$\text{よって, } (x \text{ の増加量}) = 4 - 2 = 2 \text{ で, } (y \text{ の増加量}) = -\frac{16}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = -4$$

$$\text{ゆえに, } (\text{変化の割合}) = \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{-4}{2} = -2$$