

第 8 章	数学(3 年)	名前:	日 付	No.03
	二次関数変域割合			

[問題 1]

ある斜面をころがりはじめてから x 秒間にころがる距離を y m とすると、 $y = 3x^2$ という関係があります。このとき、1秒後から4秒後までの平均の速さを求めなさい。

[解答欄]

15 m/秒

[解説]

$$x = 1 \text{ のとき } y = 3 \times 1^2 = 3, \quad x = 4 \text{ のとき } y = 3 \times 4^2 = 48$$

$$y : 3 \rightarrow 48 \quad (\text{増加量}) = (\text{進んだ距離}) = 48 - 3 = 45 \text{ m}$$

$$x : 1 \rightarrow 4 \quad (\text{増加量}) = (\text{かかった時間}) = 4 - 1 = 3 \text{ 秒}$$

$$(\text{平均の速さ}) = \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{45}{3} = 15 \text{ m/秒}$$

[問題 2]

関数 $y = ax^2$ で、 x の値が1から3まで増加するときの変化の割合が12になった。このとき、 a の値を求めなさい。

[解答欄]

 $a = 3$

[解説]

$$x = 1 \text{ のとき } y = a \times 1^2 = a, \quad x = 3 \text{ のとき } y = a \times 3^2 = 9a$$

$$y : a \rightarrow 9a \quad (\text{増加量}) = 9a - a = 8a$$

$$x : 1 \rightarrow 3 \quad (\text{増加量}) = 3 - 1 = 2$$

$$\text{ゆえに, } (\text{変化の割合}) = \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{8a}{2} = 4a$$

$$\text{変化の割合は12なので, } 4a = 12 \quad \text{ゆえに, } a = 3$$

[問題 3]

y が x の 2 乗に比例し、 x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合が 2 であるような関数の式を求めなさい。

[解答欄]

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

[解説]

求める関数の式を $y = ax^2$ とおくと、

$$x = 1 \text{ のとき } y = a \times 1^2 = a, \quad x = 3 \text{ のとき } y = a \times 3^2 = 9a$$

$$y : a \rightarrow 9a \quad (\text{増加量}) = 9a - a = 8a$$

$$x : 1 \rightarrow 3 \quad (\text{増加量}) = 3 - 1 = 2$$

$$\text{ゆえに, (変化の割合)} = \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{8a}{2} = 4a$$

$$\text{変化の割合は 2 なので, } 4a = 2 \quad \text{ゆえに } a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ゆえに求める式は } y = \frac{1}{2}x^2$$

[問題 4]

次の問いに答えなさい。

(1) 関数 $y = ax^2$ について、 x が 2 から 4 まで増加したときの y の増加量は 24 であった。

a の値を求めなさい。

(2) 関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ について、 x が a から $a+2$ まで増加したときの変化の割合は 6 であった。

a の値を求めなさい。

[解答欄]

$$(1) \quad a = 2$$

$$(2) \quad a = -7$$

[解説]

$$(1) \quad x = 2 \text{ のとき } y = a \times 2^2 = 4a, \quad x = 4 \text{ のとき } y = a \times 4^2 = 16a$$

$$\text{したがって, } (y \text{ の増加量}) = 16a - 4a = 24, \quad 12a = 24, \quad a = 2$$

$$(2) \quad x = a \text{ のとき } y = -\frac{1}{2}a^2, \quad x = a+2 \text{ のとき } y = -\frac{1}{2}(a+2)^2$$

$$(x \text{ の増加量}) = 4 - 2 = 2 \text{ で,}$$

$$(y \text{ の増加量}) = -\frac{1}{2}(a+2)^2 - \left(-\frac{1}{2}a^2\right) = -\frac{1}{2}a^2 - 2a - 2 + \frac{1}{2}a^2 = -2a - 2$$

$$\text{よって, (変化の割合)} = \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{-2a - 2}{2} = -a - 1$$

$$\text{ゆえに } -a - 1 = 6, \quad -a = 7, \quad a = -7$$

[問題 5]

関数 $y = ax^2$ (a は定数) のグラフ上の 2 点 A, B の x 座標はそれぞれ -3 , 6 で, 直線 AB の傾きは 1 である。このとき, a の値を求めなさい。

[解答欄]

$$a = \frac{1}{3}$$

[解説]

$$x = -3 \text{ のとき } y = a \times (-3)^2 = 9a, \quad x = 6 \text{ のとき } y = a \times 6^2 = 36a$$

$$y : 9a \rightarrow 36a \quad (\text{増加量}) = 36a - 9a = 27a$$

$$x : -3 \rightarrow 6 \quad (\text{増加量}) = 6 - (-3) = 9$$

$$\text{ゆえに, (変化の割合)} = \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{27a}{9} = 3a$$

直線 AB の傾きが 1 であるので, 変化の割合は 1 である。

$$\text{ゆえに, } 3a = 1 \quad \text{よって } a = \frac{1}{3}$$

[問題 6]

x の値が a から $a+3$ まで増加するとき, 2 つの関数 $y = 2x^2$ と $y = 2x+1$ の変化の割合が等しい。

このとき, a の値を求めなさい。

[解答欄]

$$a = -1$$

[解説]

まず, $y = 2x^2$ の変化の割合を求める。

$$x = a \text{ のとき } y = 2a^2, \quad x = a+3 \text{ のとき } y = 2(a+3)^2 = 2(a^2 + 6a + 9) = 2a^2 + 12a + 18$$

$$y : 2a^2 \rightarrow 2a^2 + 12a + 18 \quad (\text{増加量}) = 2a^2 + 12a + 18 - 2a^2 = 12a + 18$$

$$x : a \rightarrow a+3 \quad (\text{増加量}) = a+3 - a = 3$$

$$\text{ゆえに, (変化の割合)} = \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{12a + 18}{3} = 4a + 6$$

1 次関数の変化の割合はつねに傾きに等しいので, $y = 2x+1$ の変化の割合は 2

$$\text{よって, } 4a + 6 = 2, \quad 4a = -4, \quad a = -1$$

[問題 7]

関数 $y = ax^2$ (a は定数) について、 x の値が 1 から 4 まで増加するときの変化の割合は、 x の値が 0 から 1 まで増加するときの変化の割合よりも 3 大きくなります。このとき、 a の値を求めなさい。

[解答欄]

$$a = \frac{3}{4}$$

[解説]

まず、 x の値が 1 から 4 まで増加するときの変化の割合を求める。

$$x = 1 \text{ のとき } y = a \times 1^2 = a, \quad x = 4 \text{ のとき } y = a \times 4^2 = 16a$$

$$y : a \rightarrow 16a \quad (\text{増加量}) = 16a - a = 15a$$

$$x : 1 \rightarrow 4 \quad (\text{増加量}) = 4 - 1 = 3$$

$$\text{ゆえに、(変化の割合)} = \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{15a}{3} = 5a \cdots \textcircled{1}$$

次に、 x の値が 0 から 1 まで増加するときの変化の割合を求める。

$$x = 0 \text{ のとき } y = 0, \quad x = 1 \text{ のとき } y = a \times 1^2 = a$$

$$y : 0 \rightarrow a \quad (\text{増加量}) = a - 0 = a \quad x : 0 \rightarrow 1 \quad (\text{増加量}) = 1 - 0 = 1$$

$$\text{ゆえに、(変化の割合)} = \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{a}{1} = a \cdots \textcircled{2}$$

条件より①の変化量は②の変化量より 3 大きいので、 $5a = a + 3$, $4a = 3$ ゆえに $a = \frac{3}{4}$

[問題 8]

次の各問いにあてはまる関数は、下の①～⑤のどれですか。

(1) グラフが $(-2, -4)$ を通るもの。

(2) $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフと x 軸について対称なもの。

(3) x が 0 から 4 まで、増加したとき変化の割合が一番大きいもの。

$$\textcircled{1} \ y = 2x^2 \quad \textcircled{2} \ y = \frac{1}{2}x^2 \quad \textcircled{3} \ y = -x^2 \quad \textcircled{4} \ y = x^2 \quad \textcircled{5} \ y = 2x - 3$$

[解答欄]

(1) ③	(2) ②	(3) ①
-------	-------	-------

[解説]

(1) $x = -2$ を①～⑤にそれぞれ代入すると、① $y = 8$, ② $y = 2$, ③ $y = -4$, ④ $y = 4$

⑤ $y = -7$ よって $(-2, -4)$ を通るのは③

(2) $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフと x 軸について対称なグラフは比例定数の符号が逆になる。

(3) ⑤は 1 次関数で変化の割合は直線の傾き 2 と等しい。

①～④は 2 乗に比例する関数で、それぞれ変化の割合を計算すればよいが、ここで 2 乗に比例する関数の変化の割合の簡単な計算方法を紹介しておく。

$y = ax^2$ で x が p から q に変化するとき、

$$(\text{変化の割合}) = \frac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})} = \frac{aq^2 - ap^2}{q - p} = \frac{a(q^2 - p^2)}{q - p} = \frac{a(q + p)(q - p)}{q - p} = a(q + p)$$

これを使って①～④の変化の割合を計算すると、

$$\text{① } 2 \times (0 + 4) = 8, \quad \text{② } \frac{1}{2} \times (0 + 4) = 2, \quad \text{③ } -1 \times (0 + 4) = -4, \quad \text{④ } 1 \times (0 + 4) = 4$$

以上より変化の割合が一番大きいものは①

[問題 9]

次の(1)～(3)にあてはまる関数を下のア～カからすべて記号で選びなさい。(4)については変域を求めなさい。

$$\text{ア } y = 2x^2 \quad \text{イ } y = -2x^2 \quad \text{ウ } y = -x^2 \quad \text{エ } y = -3x + 2$$

$$\text{オ } y = 2x + 5 \quad \text{カ } y = x^2$$

- (1) $x > 0$ のとき、 x の値が増加すると、 y の値が減少するのは、どれか。
 (2) $x = 0$ のとき、 y の値が最小になるのは、どれか。
 (3) 変化の割合が一定であるものは、どれか。
 (4) イの関数について、 x の変域が $-3 \leq x \leq 2$ のときの y の変域を求めなさい。

[解答欄]

(1) イ, ウ, エ	(2) ア, カ	(3) エ, オ
(4) $-18 \leq y \leq 0$		

[解説]

(1) エ, オは1次関数で、このうち x の値が増加すると、 y の値が減少するのは傾きが負であるエである。
 アイウカは2乗に比例する関数で、このうち、 $x > 0$ のとき x の値が増加すると y の値が減少するのは比例定数が負のイ、ウである。

(2) $x = 0$ のとき y の値が最小になるのは、比例定数が正の2乗に比例する関数ア、カの場合である。

(3) 2乗に比例する関数では変化の割合は一定ではない。1次関数の場合、変化の割合は常に傾きと等しく一定の値をとる。ゆえに変化の割合が一定であるのはエ、オ。

(4) $x = 0$ は $-3 \leq x \leq 2$ の範囲内にあるので、 $x = 0, -3, 2$ のときの y の値を比較する。

$$x = 0 \text{ のとき } y = 0, \quad x = -3 \text{ のとき } y = -2 \times (-3)^2 = -18,$$

$$x = 2 \text{ のとき } y = -2 \times 2^2 = -8$$

よって最小値は $y = -18$ 、最大値は $y = 0$ ゆえに $-18 \leq y \leq 0$