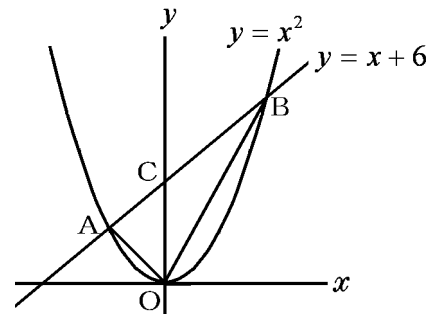


第 9 章	数学(3 年)	名前:	日 付	No.01
	二次関数応用			

[問題 1]

右の図は、関数 $y = x^2 \cdots \textcircled{1}$,
 $y = x + 6 \cdots \textcircled{2}$ のグラフである。次の各問いに答えなさい。

- (1) 交点 A, B の座標を求めなさい。
 (2) $\triangle AOB$ の面積を求めなさい。



[解答欄]

(1) A(-2, 4)	B(3, 9)	(2) 15
--------------	---------	--------

[解説]

<Point> 放物線 $y = ax^2$ と直線 $y = bx + c$ の交点 $\rightarrow ax^2 = bx + c$ を解く

交点においては、 $y = ax^2$ の y と $y = bx + c$ の y が同じなので、 ax^2 と $bx + c$ が等しくなる。よって、 $ax^2 = bx + c$ が成り立つ。

(1) $y = x^2$ と $y = x + 6$ の交点を求めるために、 $x^2 = x + 6$ とおく。

$$x^2 - x - 6 = 0, (x - 3)(x + 2) = 0, x = 3, -2$$

$x = 3$ のとき $y = 3^2 = 9$, $x = -2$ のとき $y = 4$ よって、A(-2, 4), B(3, 9)

<Point> $\triangle AOB$ の面積 $\rightarrow y$ 軸で 2 つの三角形に分けて求める。

(2) 直線 AB と y 軸の交点を C とすると、

$y = x + 6$ の y 切片が 6 なので、 $OC = 6$

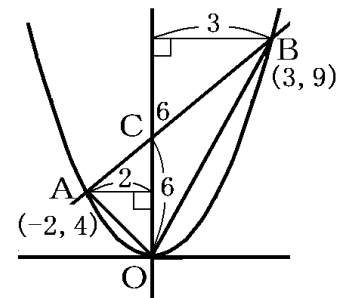
$\triangle AOC$ の面積は、 $OC = 6$ を底辺とすると高さは点 A の x 座標より 2 なので、

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$$

$\triangle BOC$ の面積は、 $OC = 6$ を底辺とすると高さは点 B の x 座標より 3 なので、

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$$

ゆえに、 $(\triangle AOB \text{ の面積}) = 6 + 9 = 15$



[問題 2]

右の図のように、関数 $y = 2x^2$ のグラフと、3 点 A, B, C があります。
点 A の座標は(1, 0)で、点 B, C は放物線上にあり、それぞれの x 座標は
2, -1 です。次の問いに答えなさい。

- (1) 直線 BC の式を求めなさい。
- (2) $\triangle OBC$ の面積を求めなさい。
- (3) $\triangle ABC$ の面積を求めなさい。

[解答欄]

(1) $y = 2x + 4$	(2) 6	(3) 9
------------------	-------	-------

[解説]

(1) 点 B の x 座標は 2 なので、 $y = 2x^2$ に入して $y = 2 \times 2^2 = 8$ ゆえに B(2, 8)

点 C の x 座標は -1 なので、 $y = 2x^2$ に入して $y = 2 \times (-1)^2 = 2$ ゆえに C(-1, 2)

直線 BC の式を $y = ax + b$ とおいて、B(2, 8), C(-1, 2) を代入すると、

$8 = 2a + b \cdots \textcircled{1}$, $2 = -a + b \cdots \textcircled{2}$ これを連立方程式として解く。

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より、 $8 - 2 = 2a + b - (-a + b)$, $6 = 2a + b + a - b$, $6 = 3a$, $a = 2$

$\textcircled{2}$ に $a = 2$ を代入すると、 $2 = -2 + b$, $b = 4$

ゆえに直線 BC の式は $y = 2x + 4$

(2) <Point> $\triangle OBC$ の面積 $\rightarrow y$ 軸で 2 つの三角形に分けて求める。

直線 BC が y 軸と交わる点を D とすると、

$y = 2x + 4$ より点 D の y 座標は 4 で $OD = 4$

$\triangle OBD$ の底辺を $OD = 4$ とすると、

点 B の x 座標が 2 なので、 $\triangle OBD$ の高さは 2

ゆえに($\triangle OBD$ の面積) $= \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$

同様に、 $\triangle OCD$ の底辺を $OD = 4$ とすると、

点 C の x 座標が -1 なので、 $\triangle OCD$ の高さは 1

ゆえに($\triangle OCD$ の面積) $= \frac{1}{2} \times 4 \times 1 = 2$ ゆえに($\triangle OBC$ の面積) $= 4 + 2 = 6$

(3) <Point> $\triangle ABC$ の面積 $\rightarrow y$ 軸に平行な直線で 2 つの三角形に分けて求める。

点 A を通って y 軸に平行な直線を引き、直線 BC との交点を E とする。

$y = 2x + 4$ に $x = 1$ を代入すると $y = 6$ ゆえに点 E の y 座標は 6 で、

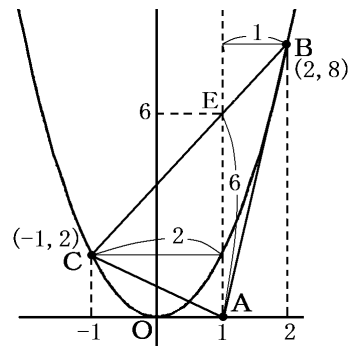
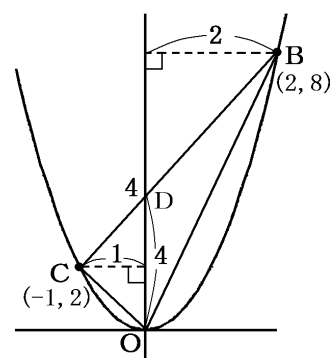
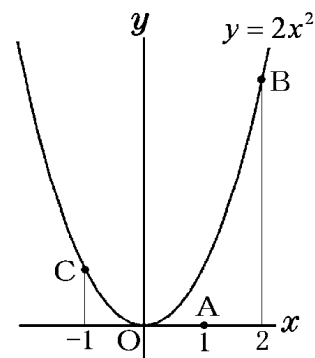
$AE = 6$

$\triangle ABE$ の底辺を $AE = 6$ とする。点 B の x 座標が 2, 点 A の x 座標は 1 なので $\triangle ABE$ の高さは $2 - 1 = 1$

ゆえに $\triangle ABE$ の面積 $= \frac{1}{2} \times 6 \times 1 = 3$

$\triangle ACE$ の底辺を $AE = 6$ とする。点 C の x 座標が -1, 点 A の x 座標は 1 なので $\triangle ACE$ の高さは $1 - (-1) = 2$

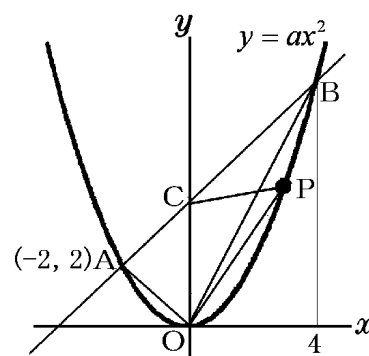
ゆえに($\triangle ACE$ の面積) $= \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$ よって $\triangle ABC$ の面積 $= 6 + 3 = 9$



[問題 3]

図の曲線は、関数 $y = ax^2$ のグラフであり、点 A、B は曲線上の点で、点 A の座標は $(-2, 2)$ 、点 B の x 座標は 4 である。また、点 C は直線 AB と y 軸との交点で、点 P は放物線上を原点 O から点 B まで動く点である。

- (1) 関数 $y = ax^2$ について、 a の値を求めなさい。
- (2) 直線 AB の式を求めなさい。
- (3) 三角形 OAB の面積を求めなさい。
- (4) 三角形 OCP の面積が三角形 OAB の面積の $\frac{1}{2}$ になるとき、点 P の座標を求めなさい。



[解答欄]

(1) $a = \frac{1}{2}$	(2) $y = x + 4$	(3) 12	(4) $\left(3, \frac{9}{2}\right)$
-----------------------	-----------------	--------	-----------------------------------

[解説]

(1) 点 A $(-2, 2)$ は $y = ax^2$ 上にあるので、 $x = -2$, $y = 2$ を $y = ax^2$ に代入して、

$$2 = a \times (-2)^2, \quad 4a = 2 \quad \text{ゆえに } a = \frac{1}{2}$$

(2) 直線 AB の式を $y = bx + c$ とおく。

点 B の x 座標は 4 なので、 y 座標は $y = \frac{1}{2}x^2$ に代入して、 $y = \frac{1}{2} \times 4^2 = 8$

$y = bx + c$ は点 B を通るので、 $x = 4$, $y = 8$ を代入して $8 = 4b + c \cdots \textcircled{1}$

また、 $y = bx + c$ は点 A を通るので、

$x = -2$, $y = 2$ を代入して $2 = -2b + c \cdots \textcircled{2}$

①, ②を b , c についての連立方程式として解く。

① - ②より、 $8 - 2 = 4b + c - (-2b + c)$, $6 = 4b + c + 2b - c$, $6 = 6b$, $b = 1$

これを①に代入すると、 $8 = 4 + c$, $c = 4$

よって $b = 1$, $c = 4$ ゆえに直線 AB の式は $y = x + 4$

(3) 直線 AB の式が $y = x + 4$ なので、点 C の y 座標は 4 で $OC = 4$

$\triangle OBC$ で $OC = 4$ を底辺とすると、点 B の x 座標が 4 であることから $\triangle OBC$ の高さは 4

$$\text{ゆえに } (\triangle OBC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$

$\triangle OAC$ で $OC = 4$ を底辺とすると、点 A の x 座標が -2 であることから $\triangle OAC$ の高さは 2

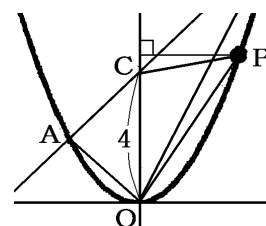
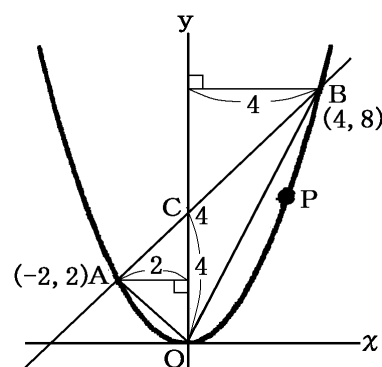
$$\text{ゆえに } (\triangle OAC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$

よって $\triangle OAB$ の面積は、 $8 + 4 = 12$

(4) $\triangle OPC$ の面積は $\triangle OAB$ の面積の $\frac{1}{2}$ なので $12 \times \frac{1}{2} = 6$ 。

底辺 $OC = 4$ なので $\triangle OPC$ の高さは 3

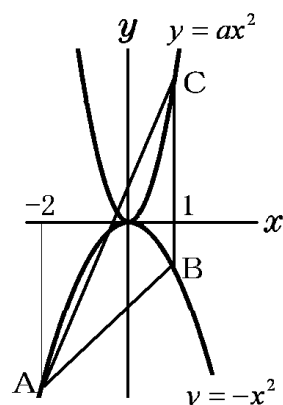
よって点 P の x 座標は 3



$$y = \frac{1}{2}x^2 \text{ に } x=3 \text{ を代入すると, } y = \frac{1}{2} \times 3^2 = \frac{9}{2} \quad \text{ゆえに点 P の座標は} \left(3, \frac{9}{2}\right)$$

[問題 4]

右の図のように、関数 $y = -x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B があり、関数 $y = ax^2$ ($a > 0$) のグラフ上に点 C がある。A の x 座標は -2 で、B と C の x 座標はどちらも 1 である。 $\triangle ABC$ の面積が 9cm^2 であるとき、関数 $y = ax^2$ の a の値を求めよ。ただし、座標の 1 目盛りを 1cm とする。



[解答欄]

$$a = 5$$

[解説]

$\triangle ABC$ の底辺を BC とすると、高さは右図の AH になる。

点 C の x 座標は 1 なので、 $y = ax^2$ に $x=1$ を代入して $y = a$

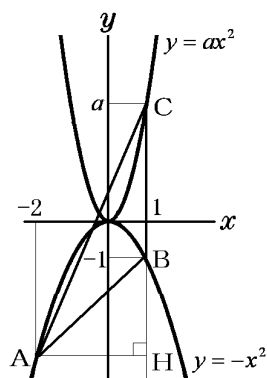
$$\text{よって, } BC = a - (-1) = a + 1$$

$$AH = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3$$

ゆえに、 $(\triangle ABC \text{ の面積}) = (\text{底辺 } BC) \times (\text{高さ } AH) \div 2$

$$= (a+1) \times 3 \div 2 = \frac{3(a+1)}{2} (\text{cm}^2)$$

$$\text{よって, } \frac{3(a+1)}{2} = 9, \quad 3(a+1) = 18, \quad a+1 = 6, \quad a = 5$$



[問題 5](三平方の定理を使う)

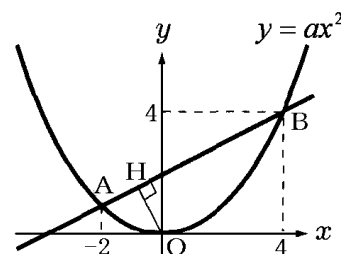
右の図のように、原点を O とし、 $y = ax^2$ のグラフ上に 2 点 A, B がある。

点 A, B の x 座標はそれぞれ $-2, 4$ であり、点 B の y 座標は 4 である。

原点 O から直線 AB に垂線 OH をひく。

このとき、次の(1)～(4)の各問いに答えなさい。

- (1) a の値を求めなさい。
- (2) 直線 AB の式を求めなさい。
- (3) 線分 AB の長さを求めなさい。
- (4) 線分 OH の長さを求めなさい。



[解答欄]

(1) $\frac{1}{4}$	(2) $y = \frac{1}{2}x + 2$	(3) $3\sqrt{5}$
(4) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$		

[解説]

(1) $y = ax^2$ は点 B(4, 4)を通るので, $x = 4, y = 4$ を $y = ax^2$ に代入して,

$$4 = a \times 16, a = 4 \div 16 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

(2) 点 A の x 座標 $x = -2$ を $y = \frac{1}{4}x^2$ に代入すると, $y = \frac{1}{4} \times 4 = 1$

よって点 A の座標は $(-2, 1)$

直線 AB の式を $y = bx + c$ とおく。

$y = bx + c$ は点 A を通るので, $x = -2, y = 1$ を $y = bx + c$ に代入して,

$$1 = -2b + c, -2b + c = 1 \cdots \textcircled{1}$$

$y = bx + c$ は点 B(4, 4)を通るので, $x = 4, y = 4$ を $y = bx + c$ に代入して,

$$4 = 4b + c, 4b + c = 4 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②を連立方程式として解く。②-①より,

$$4b + c - (-2b + c) = 4 - 1, 4b + c + 2b - c = 3, 6b = 3, b = 3 \div 6 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{1}{2} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入すると, } -2 \times \frac{1}{2} + c = 1, -1 + c = 1, c = 1 + 1 = 2$$

よって, 直線 AB の式は, $y = \frac{1}{2}x + 2$ となる。

(3) 2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ の長さは三平方の定理より,

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ となる。}$$

A(-2, 1), B(4, 4)なので,

$$(\text{線分 AB の長さ}) = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$$

(4) $\triangle OAB$ の面積を使って OH の長さを求める。

まず, $\triangle OAB$ の面積を求める。

右図のように, $\triangle OAB$ を $\triangle OAC$ と $\triangle OBC$ に分ける。

$\triangle OAC$ の底辺を OC とすると, 高さは AP になる。

直線 AB の式は $y = \frac{1}{2}x + 2$ なので, 点 C の y 座標は 2 になる。

よって, $OC = 2$

高さは AP で, 点 A の x 座標が -2 であることより, $AP = 2$

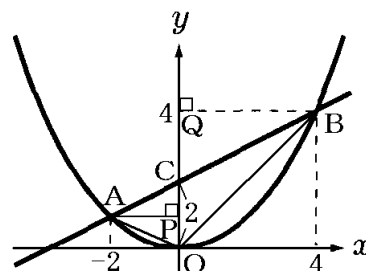
$$\text{よって, } (\triangle OAC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times OC \times AP = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

$$\text{同様にして, } (\triangle OBC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times OC \times BQ = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

$$\text{ゆえに, } (\triangle OAB \text{ の面積}) = (\triangle OAC \text{ の面積}) + (\triangle OBC \text{ の面積}) = 2 + 4 = 6$$

次に, $\triangle OAB$ の面積を AB を底辺として考える。このとき, 高さは OH なので,

$$(\triangle OAB \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times AB \times OH \quad \text{よって, } \frac{1}{2} \times AB \times OH = 6,$$



$$AB=3\sqrt{5} \text{ なので, } \frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times OH=6, \quad \frac{3\sqrt{5}}{2} \times OH=6$$

$$OH=6 \div \frac{3\sqrt{5}}{2}=6 \times \frac{2}{3\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

[問題 6]

右の図のように、関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上に、点 A、B がある。

点 A、B の x 座標は、それぞれ -4 、 2 である。点 O を通り、 $\triangle OAB$ の面積を二等分する直線の式を求めなさい。

[解答欄]

$$y = -5x$$

[解説]

<Point> $\triangle AOB$ の面積を二等分する OM

→M は AB の中点

$\triangle OAM$ で AM を底辺とすると、高さは OH

$\triangle OBM$ で BM を底辺とすると、高さは OH

高さが共通なので、AM=BM なら面積が等しい。

中点の求め方：2 つの座標の平均をとる。

線分 AB の中点を M とすると、直線 OM は三角形 OAB の面積を二等分する。

まず、点 A、B の座標を求める。

点 A の x 座標は -4 なので、 $x=-4$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入して、

$$y=\frac{1}{2} \times (-4)^2=8 \quad \text{よって、点 A の座標は} (-4, 8)$$

点 B の x 座標は 2 なので、 $x=2$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入して、

$$y=\frac{1}{2} \times 2^2=2 \quad \text{よって、点 B の座標は} (2, 2)$$

中点 M の座標の x 座標は点 A、B のそれぞれの x 座標の平均、

中点 M の座標の y 座標は点 A、B のそれぞれの y 座標の平均。

$$A(-4, 8), B(2, 2) \text{ なので, } M\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{8+2}{2}\right), \text{ すなわち } M(-1, 5)$$

OM は原点を通る直線なので、 $y=ax$ とおくことができる。

$x=-1, y=5$ を $y=ax$ に代入すると、 $5=-a$ ゆえに $a=-5$

よって OM の式は $y=-5x$

