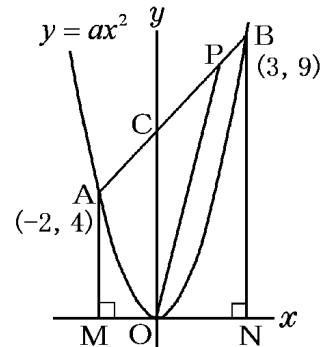


第 9 章	数学(3 年)	名前:	日 付	No.02
	二次関数応用			

[問題 1]

図のように放物線 $y = ax^2$ 上に点 $A(-2, 4)$, 点 $B(3, 9)$ がある。また, A, B から x 軸に下ろした垂線と x 軸の交点をそれぞれ M, N とするとき次の問いに答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 点 A, B を通る直線の方程式を求めよ。
- (3) 線分 AB 上に点 P をとる。線分 OP が台形 $AMNB$ の面積を 2 等分するとき, 点 P の座標を求めよ。



[解答欄]

(1) $a = 1$	(2) $y = x + 6$	(3) $\left(\frac{25}{12}, \frac{97}{12}\right)$
-------------	-----------------	---

[解説]

(1) $y = ax^2$ 上に点 $A(-2, 4)$ があるので, $x = -2, y = 4$ を $y = ax^2$ に代入して,

$$4 = a \times (-2)^2, \quad 4a = 4, \quad a = 1$$

(2) 直線 AB の式を $y = bx + c$ とおく。

$y = bx + c$ 上に点 $A(-2, 4)$ があるので, $x = -2, y = 4$ を $y = bx + c$ に代入して,

$$4 = -2b + c \cdots \textcircled{1}$$

また, $y = bx + c$ 上に点 $B(3, 9)$ があるので, $x = 3, y = 9$ を $y = bx + c$ に代入して,

$$9 = 3b + c \cdots \textcircled{2}$$

①, ②を b, c についての連立方程式として解く。

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ より, } 9 - 4 = 3b + c - (-2b + c), \quad 5 = 3b + c + 2b - c, \quad 5 = 5b, \quad b = 1$$

これを②に代入すると, $9 = 3 + c, \quad c = 6$

ゆえに直線 AB の式は $y = x + 6$

$$(3) (\text{台形 } AMNB \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (4 + 9) \times 5 = \frac{65}{2}$$

$$(\text{台形 } AMOC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (4 + 6) \times 2 = 10$$

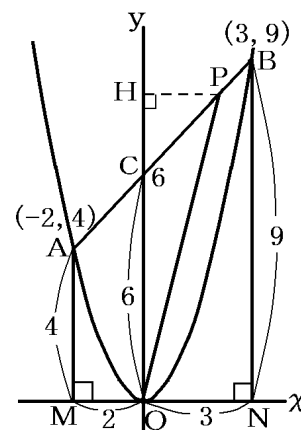
線分 OP が台形 $AMNB$ の面積を 2 等分するので,

$$(\text{台形 } AMOC \text{ の面積}) + (\triangle OPC \text{ の面積}) = \frac{65}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\text{したがって, } (\triangle OPC \text{ の面積}) = \frac{65}{2} \times \frac{1}{2} - 10 = \frac{25}{4}$$

底辺を OC とすると, 右図の PH が高さになる。

$$\text{ゆえに, } (\triangle OPC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times OC \times PH = \frac{25}{4}$$



$$OC=6 \text{ なので, } \frac{1}{2} \times 6 \times PH = \frac{25}{4}$$

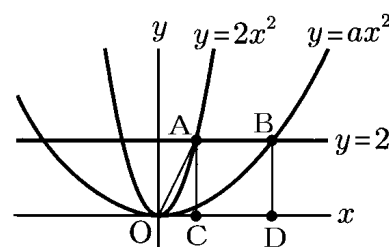
$$\text{ゆえに, } PH = \frac{25}{4} \div 3 = \frac{25}{12}$$

$$\text{よって, 点 P の } x \text{ 座標は } \frac{25}{12} \quad y = x + 6 = \frac{25}{12} + 6 = \frac{97}{12}$$

$$\text{ゆえに点 P の座標は } \left(\frac{25}{12}, \frac{97}{12} \right)$$

[問題 2]

図で, O は原点, A, B はそれぞれ, 直線 $y=2$ と 2 つの関数 $y=2x^2$, $y=ax^2$ (a は定数, $a>0$) のグラフとの交点のうち, x 座標が正である点である。また, C, D は x 軸上の点で, 四角形 $ACDB$ は正方形である。このとき, 次の問いに答えよ。



(1) a の値を求めよ。

(2) 点 C を通り, 台形 $AODB$ の面積を 2 等分する直線の式を求めよ。

[解答欄]

(1) $a = \frac{2}{9}$	(2) $y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$
-----------------------	--------------------------------------

[解説]

(1) 点 A の y 座標は 2 なので, $y=2x^2$ に $y=2$ を代入して,

$$2 = 2x^2, x^2 = 1, x > 0 \text{ なので, } x = 1$$

よって, 点 C の x 座標も 1 である。

次に, 四角形 $ACDB$ は正方形で, $AC=2$ なので, $CD=2$

よって, 点 D の x 座標は $1+2=3$ とわかる。

したがって, 点 B の座標は $(3, 2)$ である。

点 B は $y=ax^2$ 上の点なので, $y=ax^2$ に $x=3, y=2$ を代入して,

$$2 = a \times 3^2, 9a = 2$$

$$\text{よって, } a = \frac{2}{9}$$

$$(2) (\text{台形 } AODB \text{ の面積}) = (\text{上底 } AB + \text{下底 } OD) \times (\text{高さ } AC) \div 2 = (2+3) \times 2 \div 2 = 5$$

点 C を通り, 台形 $AODB$ の面積を 2 等分する直線を右上図の CE とし, $AE=t$ とおく。

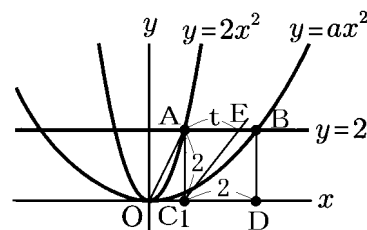
$$(\text{台形 } AOCE \text{ の面積}) = (\text{上底 } AE + \text{下底 } OC) \times (\text{高さ } AC) \div 2 = (t+1) \times 2 \div 2 = t+1$$

与えられた条件より, $(\text{台形 } AOCE \text{ の面積}) = (\text{台形 } AODB \text{ の面積}) \div 2$

$$\text{よって, } t+1 = \frac{5}{2}, t = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$$

$$(\text{直線 } CE \text{ の傾き}) = \frac{AC}{AE} = AC \div AE = 2 \div \frac{3}{2} = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

したがって, 直線 CE は, $y = \frac{4}{3}x + b$ とおくことができる。



直線 CE は点 C(1, 0)を通るので, $y = \frac{4}{3}x + b$ に $x = 1, y = 0$ を代入して,

$$0 = \frac{4}{3} \times 1 + b, \text{ よって, } b = -\frac{4}{3}$$

したがって, 直線 CE の式は, $y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$ となる。

[問題 3]

次の図のように, 平行四辺形 ABCD の頂点 A, D は放物線 $y = ax^2$ 上にあり, 頂点 B, C は x 軸上にある。B, D の座標が $(-5, 0), (3, 4)$ であるとき, 次の問いに答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 点 $(2, 4)$ を通り, 平行四辺形 ABCD の面積を 2 等分する直線の方程式を求めよ。

[解答欄]

(1) $\frac{4}{9}$	(2) $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$
-------------------	--------------------------------------

[解説]

<Point> 平行四辺形の対角線の交点を通る直線

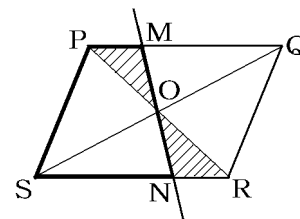
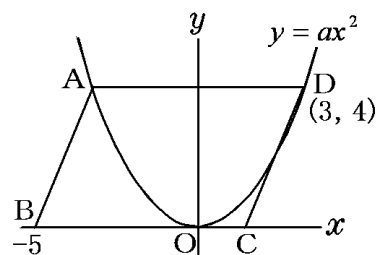
→ 平行四辺形の面積を二等分

右の平行四辺形で, $\triangle OPM \equiv \triangle ORN$ なので,

$(\triangle OPM \text{ の面積}) = (\triangle ORN \text{ の面積})$

よって,

$(\text{PSNM の面積}) = (\text{PSNO の面積}) + (\triangle OPM \text{ の面積}) = (\text{PSNO の面積}) + (\triangle ORN \text{ の面積})$
 $= (\triangle PSR \text{ の面積}) = (\text{平行四辺形 PSRQ}) \div 2$



- (1) 点 D(3, 4) は $y = ax^2$ 上にあるので, $x = 3, y = 4$ を代入して, $4 = a \times 3^2$

よって, $a = \frac{4}{9}$

- (2) 平行四辺形 ABCD の対角線 AC, BD の交点を H とすると, 平行四辺形 ABCD の面積を 2 等分する直線は右図の直線 PH になる。H は点 B(-5, 0) と点 D(3, 4) の中点なので,

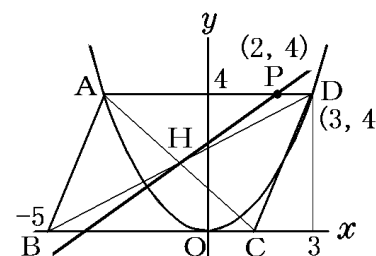
H の座標は, $\left(\frac{-5+3}{2}, \frac{0+4}{2} \right) = (-1, 2)$ となる。

直線 PH の式を $y = bx + c$ とおく。

$y = bx + c$ は H(-1, 2) を通るので, $x = -1, y = 2$ を代入して, $2 = -b + c \cdots \textcircled{1}$

$y = bx + c$ は P(2, 4) を通るので, $x = 2, y = 4$ を代入して, $4 = 2b + c \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ より, $4 - 2 = (2b + c) - (-b + c), 2 = 3b$ よって, $b = 2 \div 3 = \frac{2}{3}$



$$b = \frac{2}{3} \text{ を①に代入すると, } 2 = -\frac{2}{3} + c, c = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

したがって、直線 PH の式は $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ となる。

[問題 4]

右の図で、①は 1 次関数 $y = 2x + 12$ のグラフ、②は関数 $y = ax^2$ のグラフである。①と x 軸、 y 軸との交点を、それぞれ A、B とする。②上に点 C をとり、平行四辺形 BAOC をつくることができるとき、 a の値を求めなさい。

[解答欄]

$$a = \frac{1}{3}$$

[解説]

<Point>平行四辺形→対辺が平行で長さが等しい

$y = 2x + 12$ の y 切片は 12 なので、点 B の座標は(0, 12)

$y = 2x + 12$ に $y = 0$ を代入すると、

$$0 = 2x + 12, 2x = -12, x = -12 \div 2, x = -6$$

よって、点 A の座標は(-6, 0)

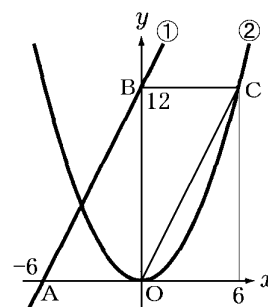
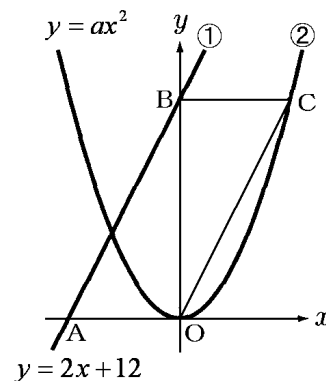
四角形 BAOC は平行四辺形なので、

$$BC \parallel AO, BC = AO = 6$$

よって、点 C の座標は(6, 12)

点 C は $y = ax^2$ 上の点なので、 $x = 6, y = 12$ を $y = ax^2$ に代入して、

$$12 = a \times 6^2, 36a = 12, a = 12 \div 36 = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$



[問題 5]

右の図のように、関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ のグラフ上に x 座標が正である点 P をとる。

この点 P から x 軸にひいた垂線と x 軸との交点を Q とする。また、 y 軸上の 2 つの点 A, B の座標を、それぞれ $(0, 2)$, $(0, -1)$ とする。直線 AP と線分 BQ が平行になるように点 P をとるとき、点 P の座標を求めよ。

[解答欄]

P(3, 3)

[解説]

<Point>平行四辺形→対辺が平行で長さが等しい

$AO \parallel PQ$, $AP \parallel OQ$ なので、四角形 $AOQP$ は平行四辺形になる。

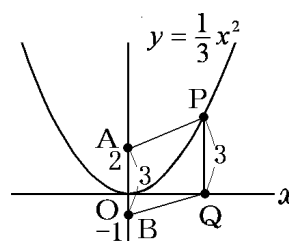
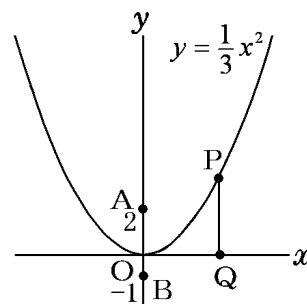
したがって、 $PQ = AO = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$

したがって、点 P の y 座標は 3 になる。

点 P は $y = \frac{1}{3}x^2$ 上にあるので、 $y = 3$ を $y = \frac{1}{3}x^2$ に代入して、

$$3 = \frac{1}{3}x^2, x^2 = 9$$

点 P の x 座標は正なので、 $x = 3$ よって、点 P の座標は $(3, 3)$



[問題 6]

右の図の①, ②は関数

$$y = \frac{1}{3}x^2 \cdots \textcircled{1} \quad y = x - 5 \cdots \textcircled{2}$$

のグラフである。点 O は原点で、点 A, B はそれぞれ②のグラフが x 軸, y 軸と交わる点である。また、 y 軸に平行な直線 l が x 軸および①, ②のグラフと交わる点をそれぞれ C, D, E とする。四角形 $OBED$ が平行四辺形になるとき、点 C の x 座標を求めよ。

[解答欄]

3

[解説]

<Point>平行四辺形→対辺が平行で長さが等しい

四角形 $OBED$ は平行四辺形なので、 $DE = OB$

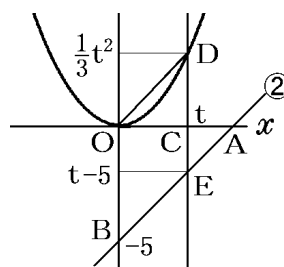
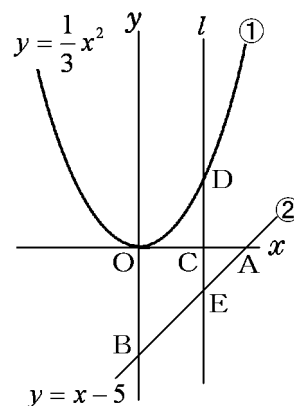
点 B は $y = x - 5$ の y 切片なので、 B の y 座標は -5

よって、 $OB = 5$

点 C の x 座標を $x = t$ とすると、

点 D の y 座標は $y = \frac{1}{3}t^2$ で、点 E の y 座標は $y = t - 5$

$$\text{よって、} DE = \frac{1}{3}t^2 - (t - 5) = \frac{1}{3}t^2 - t + 5$$

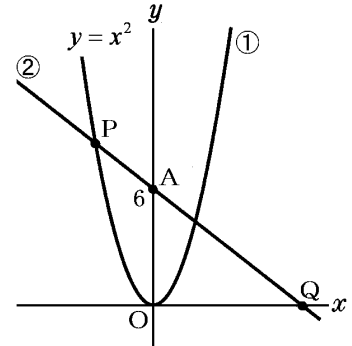


DE=OB なので、 $\frac{1}{3}t^2 - t + 5 = 5$, $\frac{1}{3}t^2 - t = 0$, $t^2 - 3t = 0$, $t(t - 3) = 0$

$t > 0$ なので, $t = 3$

[問題 7]

右の図において、曲線①は関数 $y = x^2$ のグラフである。点 A(0, 6) を通る右下がりの直線②が曲線①と交わる 2 点のうち x 座標が負の点を P とし、また、直線②と x 軸との交点を Q とする。PA : AQ = 1 : 3 となるとき、点 P の座標を求めよ。



[解答欄]

$$(-2\sqrt{2}, 8)$$

[解説]

P から x 軸に垂線 PH をひく。

AO // PH なので，平行線の性質より，

$$AO : PH = QA : QP$$

PA : AQ=1 : 3 なので, QA : QP=3 : (3+1)=3 : 4

また、A の y 座標が 6 なので、 $AO=6$

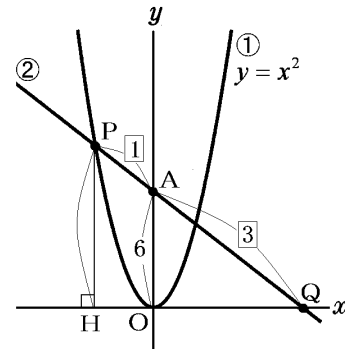
よって, $6 : \text{PH} = 3 : 4$

比の内項の積は外項の積に等しいので,

$$\text{PH} \times 3 = 6 \times 4, \quad \text{PH} = 6 \times 4 \div 3 = 8$$

よって、点 P の y 座標は 8 である。

点 P は $y=x^2$ 上の点なので、 $y=8$ を $y=x^2$ に代入して、 $8=x^2$ となる。



$x < 0$ なので、 $x = -\sqrt{8} = -\sqrt{4 \times 2} = -2\sqrt{2}$ よって、点 P の座標は $(-2\sqrt{2}, 8)$ となる。