

第 9 章	数学(3 年)	名前:	日 付	No.03
	二次関数応用			

[問題 1]

右の図のように、放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x + 6$ との交点を A, B とする。
O を原点とすると、放物線 $y = x^2$ 上の O から B までの間に点 P をとって、
 $\triangle AOB = \triangle APB$ となるようにしたい。このとき、点 P の座標を求めよ。

[解答欄]

(1, 1)

[解説]

<Point> 平行線を引き、等積変形

右図のように、原点を通して、AB に平行な直線を引くと、放物線と交わる点 P が求める点 P になる。

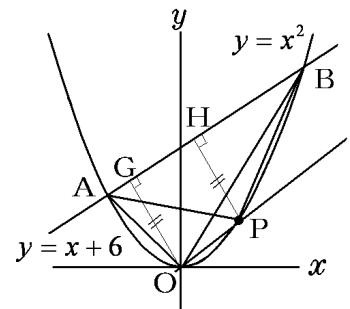
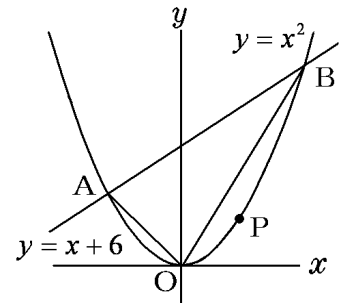
$\triangle AOB$ と $\triangle APB$ の共通の底辺を AB とすると、 $AB \parallel OP$ ならば、右図のように、 $OG = OH$ となり、高さが等しくなるので、2 つの三角形の面積は等しくなる。

OP の傾きは直線 AB ($y = x + 6$) の傾きと同じなので、OP の式は、 $y = x$ と

なる。 $y = x$ と $y = x^2$ の交点を求めるために、 $y = x$ と $y = x^2$ を連立方程式として解く。 $y = x^2$ を $y = x$ に代入して、 $x^2 = x$, $x^2 - x = 0$, $x(x - 1) = 0$, $x = 0, 1$

よって、点 P の x 座標は 1 になる。 $x = 1$ を $y = x$ に代入すると、 $y = 1$

よって、点 P の座標は、(1, 1) となる。



[問題 2]

右の図で、曲線は関数 $y = ax^2$ である。曲線①上に 3 点 A, B, C をそれぞれ x 座標が, $-2, 1, 3$ となるようにとる。ただし, $a > 0$ とする。点 D の座標が $(-1, 10)$ のとき, $\triangle ABC$ と $\triangle ABD$ の面積が等しくなるように a の値を求めなさい。

[解答欄]

$$a = \frac{10}{13}$$

[解説]

$\triangle ABC$ と $\triangle ABD$ の底辺を AB とすると、面積が等しくなることから、AB を共通の底辺としたとき、この 2 つの三角形の高さは等しい。

よって $AB \parallel DC$ で、直線 AB と直線 DC の傾きは等しい。

点 A は $y = ax^2$ 上にあり、 x 座標が -2 なので、

$$x = -2 \text{ を } y = ax^2 \text{ に代入して、 } y = a \times (-2)^2 = 4a$$

よって、点 A の座標は $(-2, 4a)$ になる。

同様にして、点 B $(1, a)$ 、点 C $(3, 9a)$ になる。

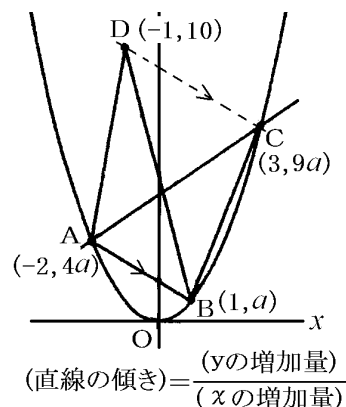
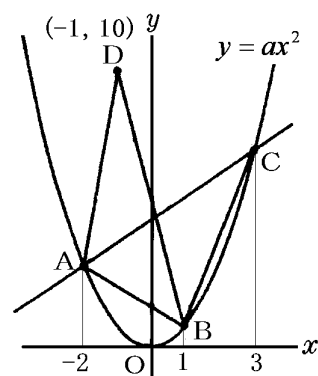
点 D $(-1, 10)$ なので、

$$(\text{AB の傾き}) = \frac{a - 4a}{1 - (-2)} = -a$$

$$(\text{DC の傾き}) = \frac{9a - 10}{3 - (-1)} = \frac{9a - 10}{4}$$

直線 AB と直線 DC の傾きは等しいので、

$$-a = \frac{9a - 10}{4}, \quad -4a = 9a - 10, \quad -13a = -10 \quad \text{ゆえに、} \quad a = \frac{10}{13}$$



[問題 3]

右の図のように、関数 $y = ax^2$ (a は正の定数) のグラフと 2 点 $A(1, 3)$, $B(-3, 1)$ がある。点 O は原点とする。点 A を通り y 軸に平行な直線と $y = ax^2$ のグラフとの交点を P とする。△ABP の面積と △ABO の面積が等しくなるとき、 a の値を求めよ。ただし、 $0 < a < 3$ とする。

[解答欄]

$$a = \frac{1}{2}$$

[解説]

BA // OP のとき、△ABP と △ABO の面積は等しくなる。

$$(\text{直線 BA の傾き}) = \frac{3-1}{1-(-3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

したがって、直線 OP の傾きも $\frac{1}{2}$ なので、

$$\text{直線 OP の式は } y = \frac{1}{2}x$$

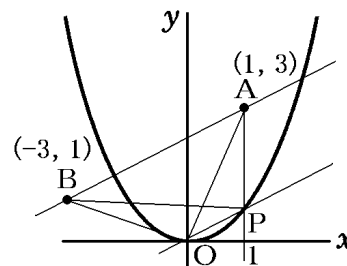
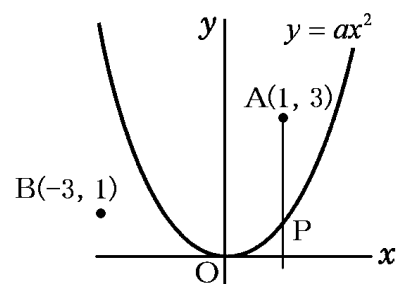
AP は y 軸に平行なので、点 P の x 座標は、点 A の x 座標と同じで、 $x = 1$ となる。

$$y = \frac{1}{2}x \text{ に } x = 1 \text{ を代入すると、 } y = \frac{1}{2}$$

よって、点 P の座標は $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

点 P は $y = ax^2$ 上にあるので、 $y = ax^2$ に $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$ を代入して、

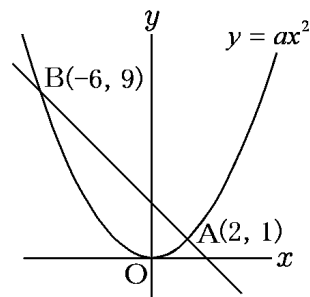
$$\frac{1}{2} = a \times 1^2 \quad \text{よって、} a = \frac{1}{2}$$



[問題 4]

右の図のように、関数 $y = ax^2$ のグラフ上に 2 点 A(2, 1), B(-6, 9) がある。
 原点を O として、次の問いに答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 直線 AB の式を求めよ。
- (3) 関数 $y = ax^2$ のグラフ上に点 P をとり、直線 AB と直線 OP が平行になるようにする。このとき、三角形 ABP の面積を求めよ。



[解答欄]

(1) $\frac{1}{4}$	(2) $y = -x + 3$	(3) 12
-------------------	------------------	--------

[解説]

(1) 点 A(2, 1) は $y = ax^2$ 上にあるので、 $y = ax^2$ に $x=2$, $y=1$ を代入して、

$$1 = a \times 4, \text{ よって, } a = \frac{1}{4}$$

(2) 直線 AB の式を $y = bx + c$ とおく。

点 A(2, 1) は $y = bx + c$ 上にあるので、 $y = bx + c$ に $x=2$, $y=1$ を代入して、

$$1 = 2b + c, \quad 2b + c = 1 \cdots \textcircled{1}$$

点 B(-6, 9) は $y = bx + c$ 上にあるので、 $y = bx + c$ に $x=-6$, $y=9$ を代入して、

$$9 = -6b + c, \quad -6b + c = 9 \cdots \textcircled{2}$$

①-②より、 $(2b+c)-(-6b+c)=1-9$, $8b=-8$, $b=8 \div (-8)$, よって、 $b=-1$

①に $b=-1$ を代入すると、 $-2+c=1$, $c=3$

ゆえに、直線 AB の式は $y = -x + 3$ となる。

(3) $\triangle ABP$ と $\triangle ABO$ で、AB を共通の底辺とすると、

AB // OP なので、2 つの三角形の高さは等しくなり、

$(\triangle ABP \text{ の面積}) = (\triangle ABO \text{ の面積})$ となる。

そこで、 $\triangle ABO$ の面積を、右図の $\triangle ACO$ と $\triangle BCO$ に分割して求める。

直線 AB の式は $y = -x + 3$ なので、 y 切片は 3 で、OC=3

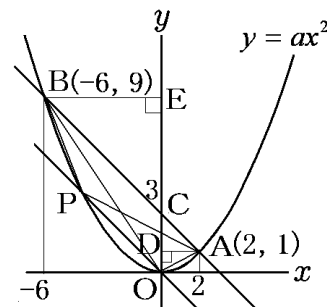
点 A の x 座標は 2 なので、 $\triangle ACO$ の底辺を OC=3 とすると、高さは AD=2

よって、 $(\triangle ACO \text{ の面積}) = (\text{底辺 OC}) \times (\text{高さ AD}) \div 2 = 3 \times 2 \div 2 = 3$

同様に、 $(\triangle BCO \text{ の面積}) = (\text{底辺 OC}) \times (\text{高さ BE}) \div 2 = 3 \times 6 \div 2 = 9$

よって、 $(\triangle ABO \text{ の面積}) = (\triangle ACO \text{ の面積}) + (\triangle BCO \text{ の面積}) = 3 + 9 = 12$

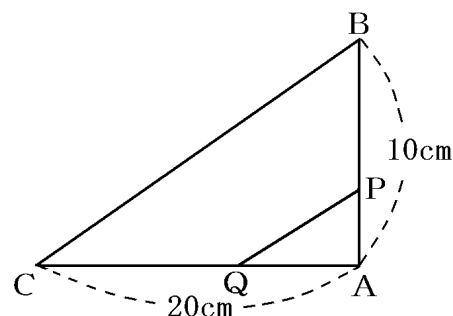
ゆえに、 $(\triangle ABP \text{ の面積}) = (\triangle ABO \text{ の面積}) = 12$



[問題 5]

右の図のような直角三角形 ABC がある。点 P は辺 AB 上を毎秒 1cm の速さで、A から B まで動き、点 Q は辺 AC 上を毎秒 2cm の速さで、A から C まで動く。P、Q が同時に A を出発してから x 秒後の $\triangle APQ$ の面積を $y \text{ cm}^2$ とするとき、次の問いに答えなさい。

- (1) y を x の式で表しなさい。また、 x の変域も求めなさい。
- (2) $\triangle APQ$ の面積が 12 cm^2 になるのは、P、Q が出発してから何秒後か。



[解答欄]

(1) $y = x^2$	$0 \leq x \leq 10$	(2) $2\sqrt{3}$ 秒後
---------------	--------------------	--------------------

[解説]

(1) x 秒後には、 $AP = x \text{ cm}$ 、 $AQ = 2x \text{ cm}$

$$\text{よって } y = \frac{1}{2} \times x \times 2x = x^2$$

P が B 点に達するのは 10 秒後、Q が C 点に達するのも 10 秒後

よって x の変域は、 $0 \leq x \leq 10$

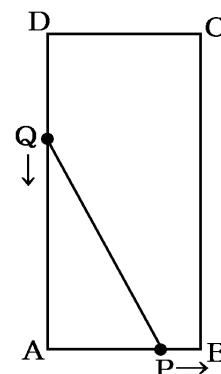
(2) $y = x^2$ に $y = 12$ を代入すると、 $12 = x^2$

$x \geq 0$ なので $x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ よって $2\sqrt{3}$ 秒後

[問題 6]

$AB = 15 \text{ cm}$ 、 $BC = 30 \text{ cm}$ の長方形 ABCD がある。右の図のように、P は AB 上を毎秒 3cm の速さで A から B まで動く。また、Q は毎秒 2cm の速さで D から A まで動く。P、Q が出発して x 秒後にできる $\triangle DPQ$ の面積を $y \text{ cm}^2$ とするとき、次の問いに答えなさい。

- (1) y を x の式で表しなさい。
- (2) $\triangle DPQ$ の面積が長方形 ABCD の面積の $\frac{1}{6}$ になるのは、P が出発してから何秒後ですか。



[解答欄]

(1) $y = 3x^2$	(2) 5 秒後
----------------	----------

[解説]

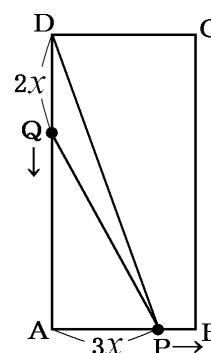
(1) x 秒後には、 $DQ = 2x \text{ cm}$ 、 $AP = 3x \text{ cm}$ なので、

$$(\triangle DPQ \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 } DQ) \times (\text{高さ } PA)$$

$$y = \frac{1}{2} \times 2x \times 3x = 3x^2$$

(2) 長方形の面積は $30 \times 15 = 450 \text{ cm}^2$ なので、

$$y = 450 \times \frac{1}{6} = 75 \text{ cm}^2$$

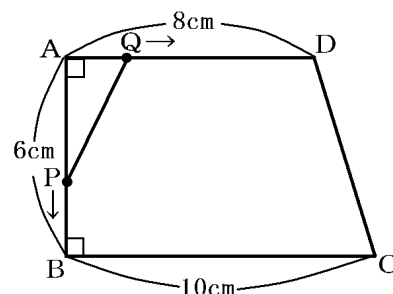


よって、 $y = 3x^2$ に $y = 75$ を代入すると、 $75 = 3x^2$, $x^2 = 75 \div 3$, $x^2 = 25$
 $x > 0$ なので $x = 5$ これは条件を満たす。

[問題 7]

次の図のような、 $AD \parallel BC$ の台形 $ABCD$ があり、

$AB = 6\text{cm}$, $BC = 10\text{cm}$, $AD = 8\text{cm}$, $\angle A = \angle B = 90^\circ$ である。点 P , Q はそれぞれ点 A を同時に出発して、点 P は辺 AB , BC 上を点 A から点 C まで毎秒 2cm の速さで移動し、点 Q は辺 AD 上を点 A から点 D まで毎秒 1cm の速さで移動する。このとき、次の問いに答えなさい。



(1) 点 P , Q がそれぞれ点 A を同時に出発してから x 秒後の $\triangle APQ$ の面積を $y \text{ cm}^2$ とするとき、次のそれぞれの場合について y を x の式で表し、 x の変域も求めなさい。

- ① 点 P が AB 上にあるとき
- ② 点 P が BC 上にあるとき

(2) $AP = PQ$ となるとき $\triangle APQ$ の面積を求めなさい。ただし、点 P , Q が点 A の位置にあるときは除く。

[解答欄]

(1)① $y = x^2$, $0 \leq x \leq 3$	② $y = 3x$, $3 \leq x \leq 8$	(2) 12cm^2
------------------------------------	--------------------------------	---------------------

[解説]

(1)① 点 P が点 B に到着するのは $6 \div 2 = 3$ 秒後 ゆえに点 P が AB 上にあるときの x の変域は $0 \leq x \leq 3$

$AP = 2x$, $AQ = x$ なので面積は $y = \frac{1}{2}x \times 2x = x^2$

② 点 P が点 C に到着するのは、 $(6 + 10) \div 2 = 8$ 秒後 ゆえに点 P が BC 上にあるときの x の変域は $3 \leq x \leq 8$

$AQ = x \text{ cm}$ を底辺とすると、高さは常に 6cm ゆえに $y = \frac{1}{2} \times x \times 6 = 3x$

(2) P が AB 上にあるときは $AP < PQ$ で $AP = PQ$ とならない。

P が BC 上にあるとき、 $AP = PQ$ であるので

右図のような状態になる。

図から明らかのように

$$\triangle APH \cong \triangle QPH$$

ゆえに $BP = AH = \frac{1}{2}AQ$, ゆえに $AQ = 2BP$

$$AQ = x \text{ cm}$$

$$AP + BP = 2x, \quad 6 + BP = 2x, \quad BP = 2x - 6$$

ゆえに $x = 2(2x - 6)$ これを解いて $x = 4$ ゆえに $y = 3x = 3 \times 4 = 12$

