

第 5 章	数学(3 年)	高校入試過去問題	文章題	2400
			関数	

[問題 1] (愛媛 2022 年 2 月)

下の図 1 のように、 $AB=10\text{ cm}$ 、 $BC=a\text{ cm}$ の長方形 $ABCD$ と、 $\angle P=90^\circ$ 、 $PQ=PR=b\text{ cm}$ の直角二等辺三角形 PQR がある。
長方形 $ABCD$ の辺 AB と直角二等辺三角形 PQR の辺 PQ は直線 ℓ 上にあり、
点 A と点 Q は同じ位置にある。

この状態から、下の図 2 のように、直角二等辺三角形 PQR を直線 ℓ にそって、
矢印の向きに、点 Q が点 B に重なるまで移動させる。

$AQ=x\text{ cm}$ のときの、2 つの図形が重なっている部分の面積を $y\text{ cm}^2$ とする。

このとき、次の問いに答えなさい。

図 1

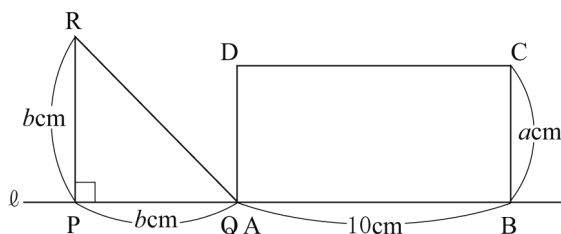
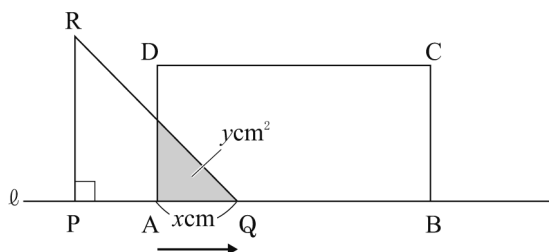


図 2



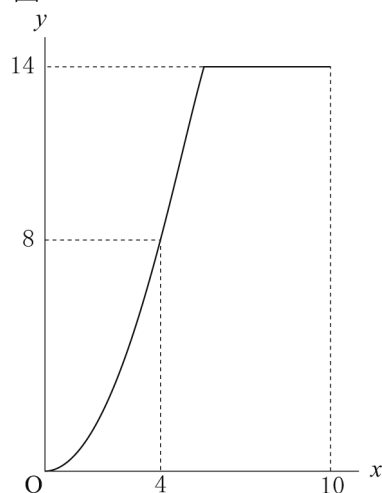
問 1 $a=5$ 、 $b=6$ とする。 $x=3$ のとき、 y の値を求めよ。

問 2

x と y の関係が右の図 3 のようなグラフで表され、
 $0 \leq x \leq 4$ では原点を頂点とする放物線、 $4 \leq x \leq 10$ では
右上がりの直線の一部と、 x 軸に平行な直線の一部である
とき、

- (1) $0 \leq x \leq 4$ のとき、 y を x の式で表せ。
- (2) a 、 b の値をそれぞれ求めよ。

図 3



[解答欄]

問 1		$(y=) \frac{9}{2}$
問 2	(1)	$y=\frac{1}{2}x^2$
	(2)	$(a=) 4$
		$(b=) \frac{11}{2}$

[解説]

問 1

$x=3$ のとき、図形は、図 1 のようになっている。

2 つの図形が重なっている部分は、

$\triangle PQR$ と相似な直角二等辺三角形であるから、

その面積は、 $y=3 \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2} (\text{cm}^2)$

問 2

(1) $0 \leq x \leq 4$ のときのグラフは、原点を頂点とする、上に開いた放物線なので、 $y=px^2 (p>0)$ とおける。

$(x, y)=(4, 8)$ である点を通るので、 $8=p \times 4^2 \Rightarrow p=\frac{1}{2}$

よって、 $y=\frac{1}{2}x^2$

(2) グラフが、放物線である部分と、右上がりの直線である部分と、 x 軸に平行な直線の部分とに分かれるということは、重なっている部分の面積の変化の仕方が 2 回変わるということである。

まず、直角二等辺三角形 PQR が出発してから、図 2 を経て、図 3 のように点 D が線分 QR 上に到達するまでは、重なっている部分が三角形になる。

図 1

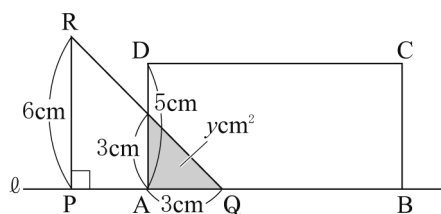


図 2

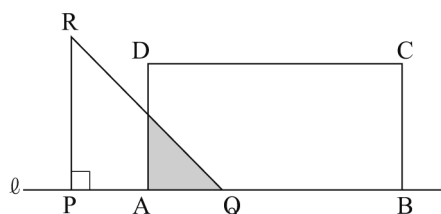
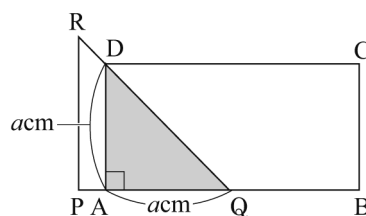


図 3



次に、そこから図4を経て、図5のように点Pが点Aに重なるまでは、重なっている部分が台形になる。

最後に、そこから後は、図6のように、重なっている部分がつねに同じ大きさの台形で、面積は変化しなくなる。

このようになるのは、 $a < b$ のときである。

グラフの式が切り替わる $(x, y) = (4, 8)$ のときが、図3のように点Dが線分QR上に到達したときであるから、

$$\frac{1}{2}a^2 = 8 \Rightarrow a > 0 \text{ より, } a = 4$$

また、面積が一定の $y = 14$ となるのは、図6のときであるから、図の $\triangle RST$ が直角二等辺三角形であることに注意すると、

$TS = RT = PR - PT = b - a = (b - 4)\text{cm}$, $PQ = b\text{cm}$ だから、重なっている部分の面積は、

$$\{(b - 4) + b\} \times 4 \times \frac{1}{2} = 4b - 8(\text{cm}^2)$$

$$4b - 8 = 14 \Rightarrow b = \frac{11}{2}$$

[補足]

なお、 $a \geq b$ のときは、直角二等辺三角形PQRが出発してから、図7を経て、図8のように点Pが点Aに重なるまでは、重なっている部分が三角形になり、その後は図9のように、重なっている部分がつねに同じ大きさの三角形で、面積は変化しなくなる。

よって、この場合は、重なっている部分の面積の変化の仕方が1回しか変わらない。

図8

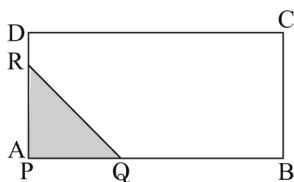


図4

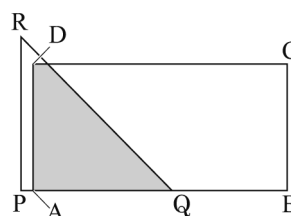


図5

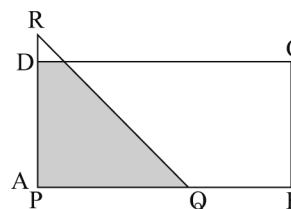


図6

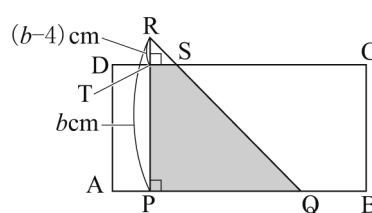


図7

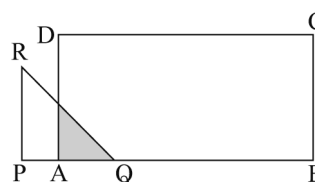
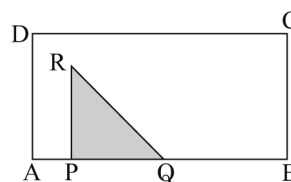


図9



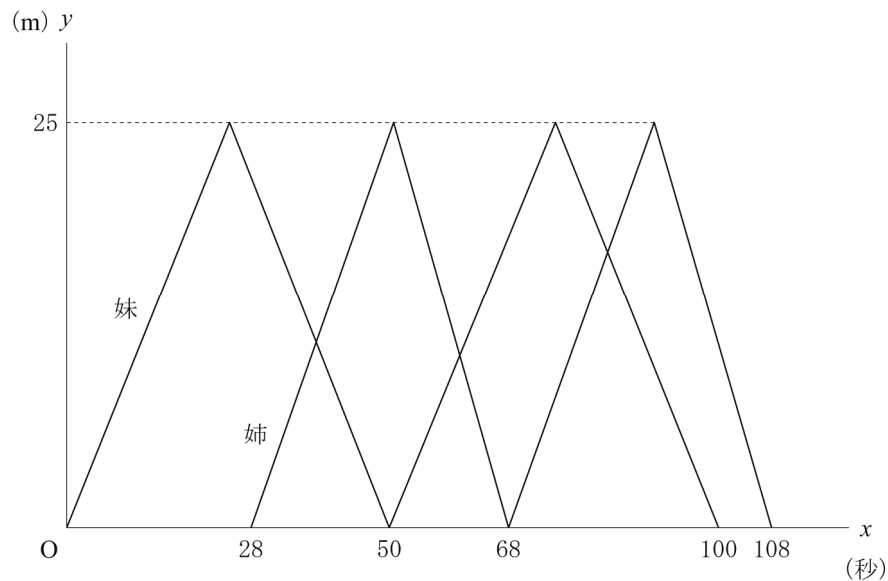
[問題 2] (熊本 2022 年 2 月)

長さ 25 m のプールで、妹と姉が、同じスタートラインから別々のレーンをクロールで泳ぎ始め、一定の速さで泳ぎ、2 往復してゴールした。

妹は、スタートしてから 100 秒後にゴールし、姉は、妹より 28 秒遅くスタートして、 8 秒遅くゴールした。

下の図は、妹のスタートから計測を始めて x 秒後の妹と姉の位置を、それぞれのスタート地点からの距離 $y\text{ m}$ で表したグラフである。

ただし、妹と姉の身長や折り返しのターンにかかる時間は考えないものとする。



- (1) グラフから、妹と姉は 3 回すれちがっていることがわかる。2 回目にすれちがったのは、妹がスタートしてから何秒後か、求めなさい。
- (2) 次の日、妹と姉は同じプールを泳いで 2 往復した。妹は、前の日と同じ速さで泳いで 2 往復した。姉は、妹がスタートしてから a 秒後にスタートし、最初平泳ぎで毎秒 $b\text{ m}$ の速さで 1 往復し、続けてクロールで前の日と同じ速さで 1 往復して、妹より 8 秒遅くゴールした。妹と姉は、泳いでいる間に 3 回すれちがっており、2 回目にすれちがったのは、妹がスタートしてから 58 秒後であった。 a と b の値をそれぞれ求めなさい。

[解答欄]

(1)	60 秒後
(2)	$a=5.5, b=0.8$

【解説】

- (1) 1 往復が 50m で、妹は 50 秒で 1 往復するから、妹の泳ぐ速さは毎秒 1m

姉は 40 秒で 1 往復するから姉の泳ぐ速さは毎秒 1.25m

妹と姉が 2 回目にすれちがうのは、妹がスタートラインで 2 回目のターンをして、スタートラインの反対側に向かって泳いでいるときである。

このとき、妹の x と y の関係を表す式は、スタートラインの反対側に向うときだから傾きは、1 であり、 $y=x+p$ と表せる。

点(50, 0)を通るから、これを上の x と y の関係を表す式に代入して

$$0=50+p \text{ より, } p=-50 \quad y=x-50 \cdots \textcircled{1}$$

姉は 1 回目のターンをしてスタートラインに戻るとき、2 回目のすれちがいとなる。

このとき、姉が毎秒 1.25m の速さでスタートラインに戻るときだから、傾きは -1.25 となり、姉の x と y の関係を表す式は、 $y=-1.25x+q$ と表せる。

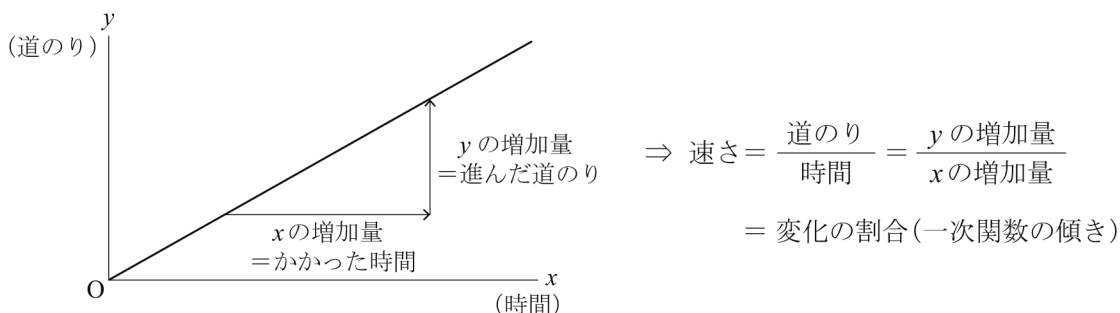
また、点(68, 0)を通るから、これを上の x と y の関係を表す式に代入して

$$0=-1.25 \times 68+q \text{ より, } q=85 \quad y=-1.25x+85 \cdots \textcircled{2}$$

①と②を連立して解くと、 $x=60$, $y=10$ となり、これは問題にあっている。

よって、妹と姉が 2 回目にすれちがうのは、妹がスタートしてから 60 秒後。

ポイント 速さに関するグラフの問題では、「速さ＝変化の割合」と覚えておこう！



ポイント 直線の式の求め方

① $y=ax+b$ とおく。

② その式に、「 a : 傾き, 変化の割合」「 b : 切片」「 (x, y) : 対応する x, y の値の組, グラフが通る点の座標」のうち、2 つの条件を見つけて代入する。

- (2) 妹と姉が 2 回目にすれちがったのは 58 秒後だから、妹がスタートラインで 2 回目のターンをして、スタートラインの反対側に向かって泳いでいるときであり、スタートラインから 8m の地点である。また、姉は 1 回目のターンをしてスタートラインに戻るときである。2 回目にすれちがうまでに姉が泳いだ時間と距離は、それぞれ $58-a$ (秒), $25+(25-8)=42$ (m) だから、平泳ぎの速さは $b=\frac{42}{58-a} \cdots \textcircled{3}$

姉が 2 往復にかかった時間は $108-a$ (秒)であり、平泳ぎで泳いだ時間は、 $\frac{50}{b}$ 秒、クロールで泳いだ

時間は 40 秒だから、 $108-a=\frac{50}{b}+40 \cdots \textcircled{4}$

③より、 $\frac{1}{b}=\frac{58-a}{42}$ だから、これを④に代入して、 $108-a=50 \times \frac{58-a}{42}+40$

これを解いて、 $a=5.5$, $b=0.8$ となり、これは問題にあっている。

[問題 3] (静岡 2022 年 2 月)

図 3 の立体は、 $\triangle ABC$ を 1 つの底面とする三角柱である。

この三角柱において、 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ， $AB = 12 \text{ cm}$ ， $AD = 3 \text{ cm}$ であり、
側面はすべて長方形である。

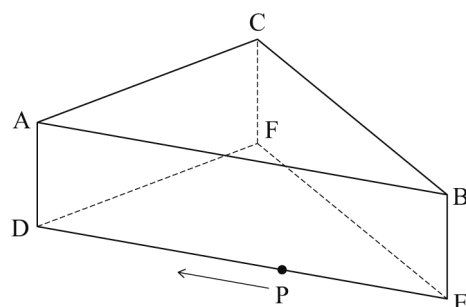
また、点 P は、点 E を出発し、毎秒 1 cm の速さで 3 辺 ED ， DA ， AB 上を、点 D ， A を通って
点 B まで移動する。

このとき、次の問 1 ～問 3 に答えなさい。

問 1

点 P が辺 ED 上にあり、 $\triangle ADP$ の面積が 6 cm^2 となる
のは、点 P が点 E を出発してから何秒後か、答えなさい。

図 3



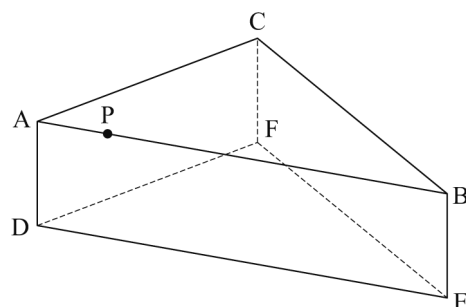
問 2

点 P が点 E を出発してから 14 秒後のとき、 $\triangle APE$ を、辺 AP を軸として 1 回転させてできる立体の
体積を求めなさい。ただし、円周率は π とする。

問 3

この三角柱において、図 4 のように点 P が辺 AB 上に
あり、 $CP + PD$ が最小となるときの、線分 PF の長さを
求めなさい。

図 4



[解答欄]

問 1	8
問 2	48π
問 3	$\sqrt{61}$

【解説】

問 1

点 P が点 E を出発してから x 秒後であるとする、 x 秒後の EP の長さは、 $EP=x$ cm である。

よって、 $DP=12-x(\text{cm})$ なので、 $\triangle ADP=DP \times AD \times \frac{1}{2}=(12-x) \times 3 \times \frac{1}{2}=6 \Rightarrow x=8(\text{秒後})$

問 2

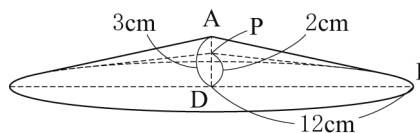
点 P が点 E を出発してから 14 秒後のとき、

点 P は $ED+DP=14\text{cm}$

すなわち、点 P は辺 DA 上にあり、 $DP=2\text{cm}$ のところに到達している。

そのとき、 $\triangle APE$ を、辺 AP を軸として 1 回転させてできる立体は、図 1 のように、底面が半径 12cm の円で、高さが 3cm の円錐から、底面を同じくする高さが 2cm の円錐を取り除いたものである。

図 1



よって、その体積は、 $122 \times \pi \times 3 \times \frac{1}{3} - 122 \times \pi \times 2 \times \frac{1}{3} = 122 \times \pi \times \frac{1}{3} \times (3-2) = 48\pi (\text{cm}^3)$

問 3

$CP+PD$ が最小となるのは、図 2 のように、面 ABC、面 ADEB の部分を展開したときに、3 点 C, P, D が一直線上に並ぶときである。

点 C から辺 AB に垂線 CG をひくと、 $\triangle ABC$ が直角二等辺三角形だから、

$\triangle ACG$ も直角二等辺三角形である。よって、 $CG=AG=\frac{1}{2}AB=6(\text{cm})$

また、 $AD \perp AG$, $CG \perp AG$ より、 $AD \parallel CG$ だから、平行線と線分の

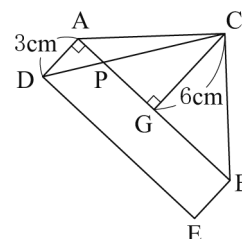
比より、 $AP:PG=AD:CG=3:6=1:2 \Rightarrow PG=\frac{2}{3}AG=\frac{2}{3} \times 6=4(\text{cm})$

よって、直角三角形 CGP において、三平方の定理より、

面 $ABC \perp$ 辺 CF だから、 $CP \perp CF$ なので、 $\triangle CFP$ は直角三角形である。

よって、三平方の定理より、 $PF=\sqrt{CP^2+CF^2}=\sqrt{(2\sqrt{13})^2+32}=\sqrt{61}(\text{cm})$

図 2



[問題 4] (大分 2022 年 2 月)

右の図 1 のように、台形 ABCD があり、

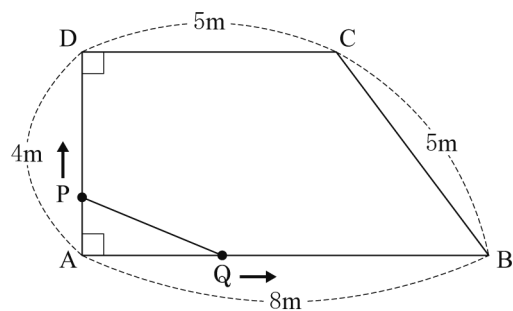
$AB=8\text{ m}$, $BC=5\text{ m}$, $CD=5\text{ m}$, $DA=4\text{ m}$,

$\angle DAB=\angle CDA=90^\circ$ である。

点 P は、点 A を出発して、毎分 1 m の速さで、
辺 AD, DC, CB 上を点 B に着くまで移動する。

また、点 Q は、点 P と同時に点 A を出発して、
毎分 2 m の速さで、辺 AB 上を点 B に着くまで移動
し、その後、点 P が点 B に着くまでの間、停止する。

図 1



2 点 P, Q が点 A を同時に出発してから x 分後の $\triangle AQP$ の面積を $y\text{ m}^2$ とする。

ただし、点 P と点 Q が一致している場合は $y=0$ とする。

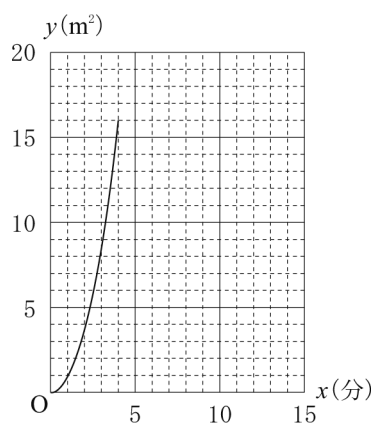
次の(1), (2)の問いに答えなさい。

(1)

右の図 2 は、2 点 P, Q が点 A を同時に出発して
から 4 分後までの x と y の関係を表すグラフである。

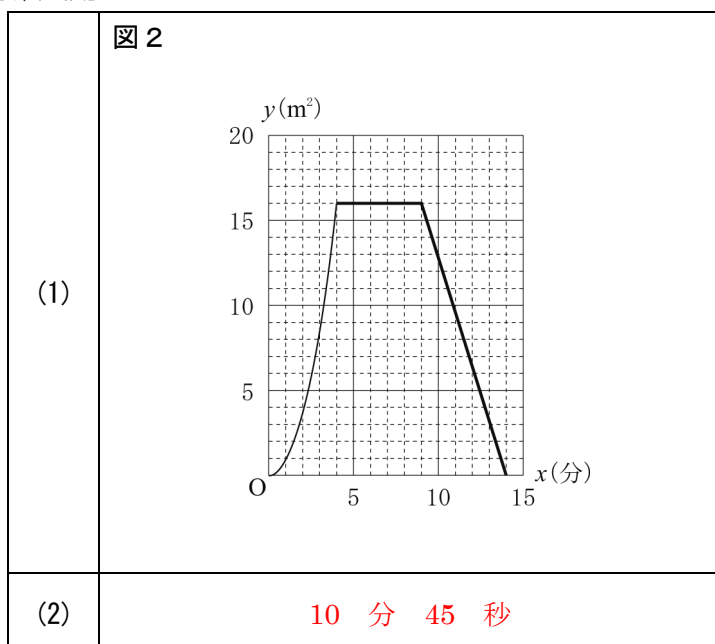
2 点 P, Q が点 A を同時に出発して 4 分後から点 P
が点 B に着くまでの x と y の関係を表すグラフを
解答欄の図 2 にかき入れなさい。

図 2



(2) $\triangle AQP$ の面積が、最初に 4 m^2 となつてから最後に 4 m^2 となるまでにかかる時間は何分何秒か、
求めなさい。

[解答欄]



【解説】

(1)

(i) 点 P が辺 DC 上を移動するとき、つまり $4 \leq x \leq 9$ のとき、 $\triangle AQP$ は、図 1 のようになっている。このとき、 $\triangle AQP$ の面積について、AQ を底辺としたときの高さは常に 4m である。よって、

$$y = \frac{1}{2} \times AQ \times 4 = 16$$

(ii) 点 P が辺 CB 上を移動するとき、つまり $9 \leq x \leq 14$ のとき、 $\triangle AQP$ は図 2 のようになっている。

$x=9$ のとき $y=16$ で、 $x=14$ のとき $y=0$ となっていることから、この 2 点を通る直線を答えと判断してもよいが、ここでは計算によって関数の式を求める。

点 C と点 P からそれぞれ AB に垂線 CC' 、 PP' をおろすと、 $\triangle BCC' \sim \triangle BPP'$ となる。

$9 \leq x \leq 14$ のときの点 P の位置について、x 分間に点 P は x m だけ進んだので、

$AD + DC + CP = x$ m である。

さらに、 $AD + DC + CB = 14$ (m) であることを考えれば、 $PB = (14 - x)$ m と表すことができる。

ここで、 $\triangle BCC' \sim \triangle BPP'$ から対応する辺の比は等しく、

$$BC : BP = CC' : PP' \quad 5 : (14 - x) = 4 : PP' \quad \text{より、} PP' = \frac{4(14 - x)}{5} \text{ m とする。}$$

$$\text{よって、} y = \frac{1}{2} \times AB \times PP' = \frac{16(14 - x)}{5} = -\frac{16}{5}x + \frac{224}{5}$$

図 1

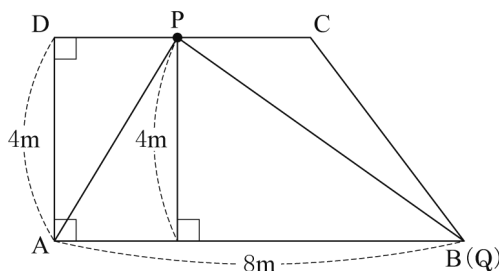
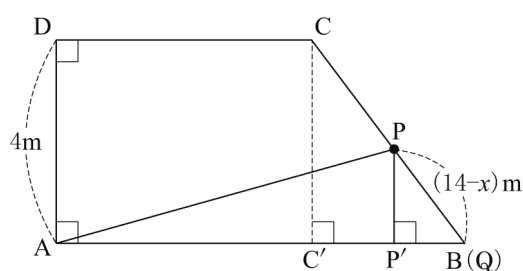


図 2



(2)

(1)のグラフから、 $0 \leq x \leq 4$ のときと、 $9 \leq x \leq 14$ のときにそれぞれ 1 回ずつ $y=4$ となることがわかる。

$0 \leq x \leq 4$ のとき、2 点 P、Q はそれぞれ辺 AD、AB 上を動いており、

$$AP = x \text{ m, } AQ = 2x \text{ m だから、} y = \frac{1}{2} \times AQ \times AP = \frac{1}{2} \times 2x \times x = x^2$$

よって、1 回目に $y=4$ となるのは、 $y=x^2$ にこれを代入して、

$x^2=4$ $0 \leq x \leq 4$ より、 $x=2$ よって、1 回目に $\triangle AQP$ の面積が 4 m^2 になるのは、2 秒後。

次に、2 回目に $y=4$ となるのは、 $y = \frac{16(14 - x)}{5}$ にこれを代入して x についての方程式を解くと、

$$x = \frac{51}{4} = 12\frac{3}{4} \quad \text{これは } 9 \leq x \leq 14 \text{ を満たすので問題にあう。}$$

よって、2 回目に $\triangle AQP$ の面積が 4 m^2 になるのは $12\frac{3}{4}$ 分後なので、その差は $12\frac{3}{4} - 2 = 10\frac{3}{4}$ (分)

すなわち、10 分 45 秒。

[問題 5] (福岡 2022 年 2 月)

室内の乾燥を防ぐため、水を水蒸気にして空気中に放出する電気器具として加湿器がある。

洋太さんの部屋には、「強」「中」「弱」の 3 段階の強さで使える加湿器 A がある。

加湿器 A の水の消費量を加湿の強さごとに調べてみると、「強」「中」「弱」のどの強さで使用した場合も、水の消費量は使用した時間に比例し、1 時間あたりの水の消費量は表のようになることがわかった。

表

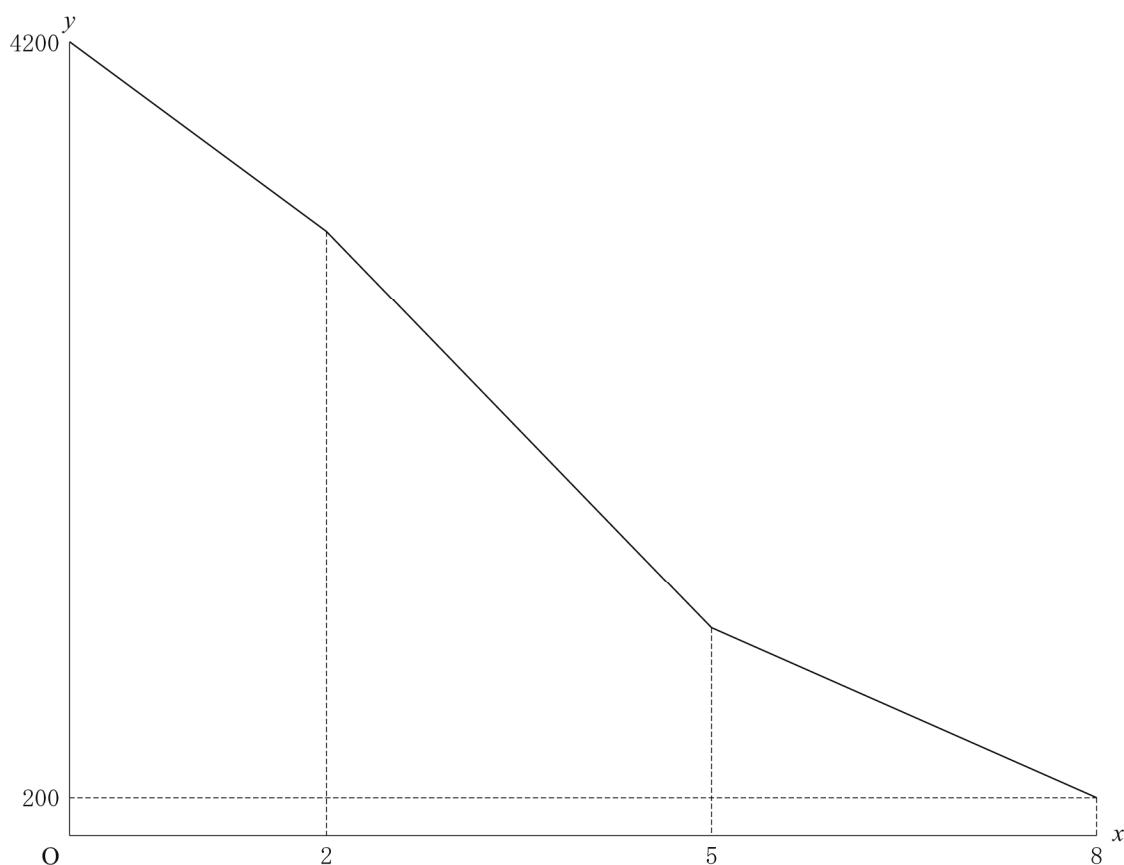
加湿の強さ	強	中	弱
1 時間あたりの水の消費量	700	500	300

洋太さんは 4200 mL の水が入った加湿器 A を、正午から「中」で午後 2 時まで使用し、午後 2 時から「強」で午後 5 時まで使用し、午後 5 時から「弱」で使用し、午後 8 時に加湿器 A の使用をやめた。

午後 8 時に加湿器 A の使用をやめたとき、加湿器 A には水が 200 mL 残っていた。

図は、洋太さんが正午に加湿器 A の使用を始めてから x 時間後の加湿器 A の水の残りの量を y mL とするとき、正午から午後 8 時までの x と y の関係をグラフに表したものである。

図



次の問 1 ～問 3 に答えよ。

問 1 正午から午後 1 時 30 分までの間に、加湿器 A の水が何 mL 減ったか求めよ。

問 2 仮に、加湿器 A を、午後 5 時以降も「強」で使用し続けたとすると、正午に加湿器 A の使用を始めてから何時間後に加湿器 A の水の残りの量が 0 mL になるかを、次の方法で求めることができる。

方法

図において、 x の変域が $2 \leq x \leq 5$ のとき、 y を x の式で表すと、
 $y = [\quad] (2 \leq x \leq 5)$ である。 $x \geq 5$ のときも、 x と y について
 同じ関係が成り立つとして、この式に $y = 0$ を代入して x の値を求める。

このとき、方法の [] にあてはまる式をかけ。

問 3 洋太さんの妹の部屋には加湿器 B がある。加湿器 B は、加湿の強さが一定で、使用した場合の水の消費量は、使用した時間に比例する。

洋太さんが正午に加湿器 A の使用を始めた後、洋太さんの妹は、午後 2 時に 4200 mL の水が入った加湿器 B の使用を始め、午後 7 時に加湿器 B の使用をやめた。

午後 7 時に加湿器 B の使用をやめたとき、加湿器 B には水が 200 mL 残っていた。

午後 2 時から午後 7 時までの間で、加湿器 A と加湿器 B の水の残りの量が等しくなった時刻は、午後何時何分か求めよ。

[解答欄]

問 1	750 mL
問 2	$-700x + 4600$
問 3	午後 6 時 24 分

【解説】

問 1

1 時間 30 分、つまり 1.5 時間の間、「中」で加湿器を使用したので、 $500 \times 1.5 = 750$ (mL)

問 2

午後 2 時までに、加湿器を「中」で 2 時間使用したので、残りの水の量は、
 $4200 - 500 \times 2 = 3200$ (mL) よって、求めたい関数は、 $(2, 3200)$ を通ることが分かる。

また、 $2 \leq x \leq 5$ のときは加湿器を「強」で使用しており、傾きが -700 と分かる。

よって、傾きと通る 1 点の座標が分かったので、この情報をもとに関数の式を求める。

ポイント 直線の式の求め方

① $y = ax + b$ とおく。

② その式に、「a : 傾き、変化の割合」「b : 切片」「(x, y) : 対応する x, y の値の組、グラフが通る点の座標」のうち、2 つの条件を見つけて代入する。

問 3

加湿器 B は午後 2 時の時点で水量が 4200mL であること、午後 7 時の時点で残りの水量が 200mL であることを考えると、残りの水量を表すグラフは図 1 のようになる。

また、2 点(2, 4200), (7, 200)を通ることから、加湿器 B の残りの水量を表すグラフの式は、

$$y = -800x + 5800 \cdots \textcircled{1}$$

また、図 1 から、加湿器 A と加湿器 B の残りの水量が同じになるのは、 $5 \leq x \leq 8$ のときだと予想される。

次に、この範囲での加湿器 A の残りの水量を表すグラフの式を求める。

「弱」で使用していることから傾きが -300 で、(8, 200)を通ることから、 $y = -300x + 2600 \cdots \textcircled{2}$ である。

①、②を連立方程式として解くと、

$$x = \frac{32}{5} = 6\frac{2}{5} \text{ (時間)} \quad \text{これは } 5 \leq x \leq 8 \text{ を満たすので、問題にあっている。}$$

$$\frac{2}{5} \text{ 時間} = 60 \times \frac{2}{5} = 24 \text{ 分であることに注意すると、答えは午後 6 時 24 分}$$

図 1

