

第 6 章	数学(2 年)	高校入試過去問題	関数	3200
			1 次関数	

[問題 1] (熊本 2022 年 2 月)

右の図のように、2 つの関数

$$y = ax^2 \text{ (} a \text{ は定数) } \cdots \cdots \textcircled{ア}$$

$$y = -x^2 \cdots \cdots \textcircled{イ}$$

のグラフがある。

点 A は関数 $\textcircled{ア}$ のグラフ上にあり、A の座標は (4, 4) であ

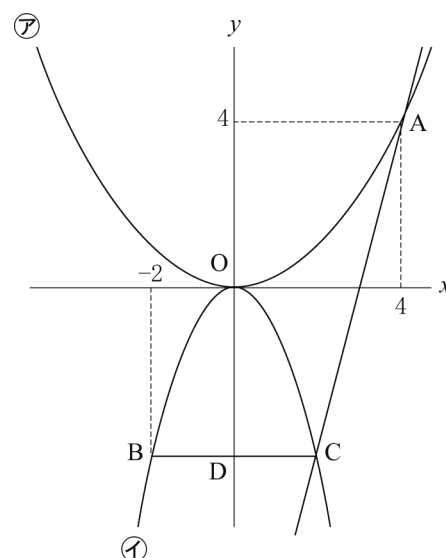
る。2 点 B, C は関数 $\textcircled{イ}$ のグラフ上にあり、

B の x 座標は -2 で、線分 BC は x 軸と平行である。

また、点 D は線分 BC と y 軸との交点である。

このとき、次の各問いに答えなさい。

- (1) a の値を求めなさい。
- (2) 直線 AC の式を求めなさい。



次に点 A から y 軸にひいた垂線と y 軸との交点を H とする。線分 AH 上に点 P を、
線分 AC 上に点 Q を、 $QA = QP$ となるようにとるとき、P の x 座標を t として、

- (3) 点 Q の x 座標を、t を使った式で表しなさい。
- (4) $\triangle QHD$ の面積が、 $\triangle PHQ$ の面積の 3 倍となるような t の値をすべて求めなさい。

[解答欄]

(1)	$a = \frac{1}{4}$
(2)	$y = 4x - 12$
(3)	$\frac{1}{2}t + 2$
(4)	$t = \frac{4}{3}, 2$

[解説]

(1) A(4, 4) を関数 $\textcircled{ア}$ の式である $y = ax^2$ に代入して、 $4 = a \times 4^2$ より、 $a = \frac{1}{4}$

(2) 点 C と点 B の y 座標は同じであり、点 B の x 座標は -2

これを関数 $\textcircled{イ}$ である $y = -x^2$ に代入して、 $y = -(-2)^2$ より、 $y = -4$ 、

点 C の x 座標を x とすると、 $-x^2 = -4$ $x > 0$ だから、 $x = 2$

したがって、C(2, -4)

直線 AC の傾きは、 $\frac{4 - (-4)}{4 - 2} = \frac{8}{2} = 4$ だから、直線 AC の式は、 $y = 4x + b$ と表せる。

点 A(4, 4) を通るから、 $4 = 4 \times 4 + b$ より、 $b = -12$ よって、直線 AC の式は、 $y = 4x - 12$

ポイント関数の式と定数のまとめ

- ・ y は x に比例する → 式は $y=ax$, 定数 a を「比例定数」という。
- ・ y は x に反比例する → 式は $y=\frac{a}{x}$, 定数 a を「比例定数」という。
- ・ y は x の 1 次関数である → 式は $y=ax+b$, 定数 a は「変化の割合」でグラフの「傾き」を, 定数 b はグラフの「切片」を, それぞれ表す。
- ・ y は x の 2 乗に比例する → 式は $y=ax^2$, 定数 a を「比例定数」という。

(3) 図 1 のように点 Q から直線 PA にひいた垂線と PA との交点を点 R とする。

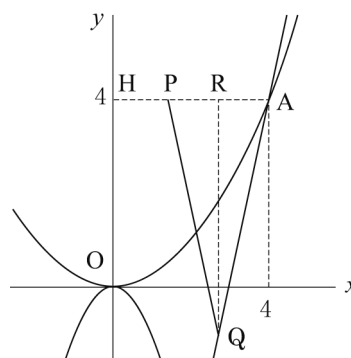
$\triangle APQ$ は $QA=QP$ とする二等辺三角形だから, $PR=AR$ なので, R は線分 PA の中点である。

$A(4, 4)$ と $P(t, 4)$ の中点は, $R\left(\frac{t+4}{2}, \frac{4+4}{2}\right)$ だから, $R\left(\frac{t+4}{2}, 4\right)$

点 Q と点 R の x 座標は同じだから,

点 Q の x 座標は $\frac{t+4}{2} = \frac{1}{2}t + 2$

図 1



(4) 図 2 のように $\triangle QHD$ と $\triangle PHQ$ を考える。

点 D の y 座標は点 B の y 座標と同じで, y 軸上の点より,

$D(0, -4)$ だから, $HD = 4 - (-4) = 8$

$\triangle QHD$ の底辺を HD としたとき, 高さは点 Q の x 座標

なので, $\triangle QHD = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{t+4}{2} = 2t + 8 \cdots \textcircled{1}$

2 点 A, C を通る直線 AC の式は, $y = 4x - 12$ だから,

直線 AC の式に点 Q の x 座標 $x = \frac{t+4}{2}$ を代入して,

点 Q の y 座標は, $y = 2t - 4$

$\triangle PHQ$ の底辺を HP としたとき, 高さは点 H と点 Q との y 座標の差だから, 高さは $4 - (2t - 4)$

$\triangle PHQ = \frac{1}{2} \times t \times \{4 - (2t - 4)\} = -t^2 + 4t \cdots \textcircled{2}$

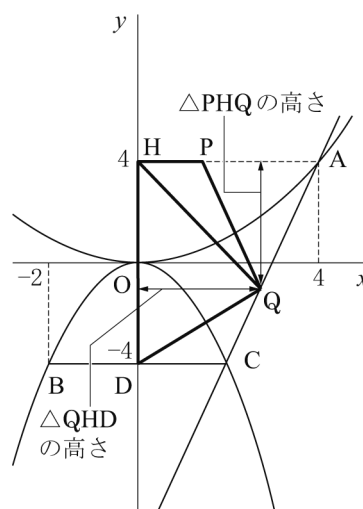
$\triangle QHD = 3\triangle PHQ$ だから, $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より, $2t + 8 = 3(-t^2 + 4t)$

整理して, $3t^2 - 10t + 8 = 0$ 解の公式より,

$$t = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \times 3 \times 8}}{2 \times 3} = \frac{10 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{10 \pm 2}{6}$$

$$t = \frac{4}{3}, 2$$

図 2



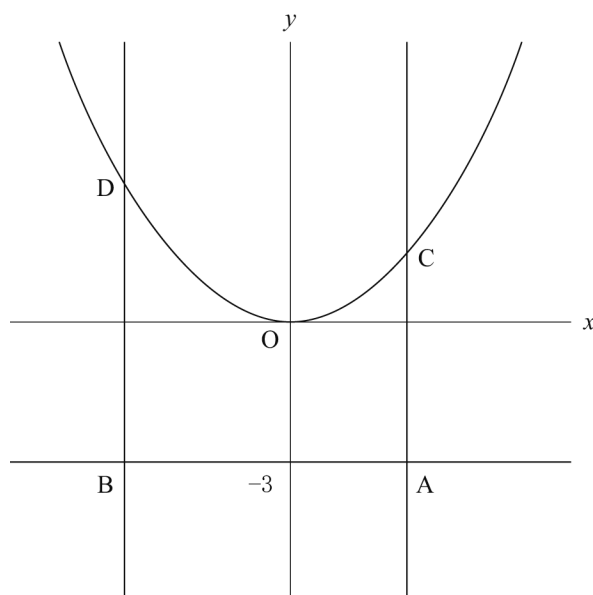
[問題 2] (広島 2022 年 2 月)

下の図のように、関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフがあります。

また、方程式 $y = -3$ のグラフ上を $x > 0$ の範囲で動く点 A、 $x < 0$ の範囲で動く点 B があります。

点 A を通り y 軸に平行な直線と、関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフとの交点を C、

点 B を通り y 軸に平行な直線と、関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフとの交点を D とします。



次の(1)・(2)に答えなさい。

- (1) 点 A の x 座標が 4、 $\triangle OBA$ の面積が 9 となる時、点 B の x 座標を求めなさい。
- (2) 四角形 DBAC が正方形となるような点 A の x 座標を全て求めなさい。

[解答欄]

(1)	-2
(2)	2 , 6

[解説]

(1) 点 B の x 座標を b ($b < 0$) とすると、辺 AB の長さは $4 - b$ と表せる。

$\triangle OBA$ の底辺を辺 AB とすると、

高さは 3 だから、 $\triangle OBA$ の面積を求める式から、 $\frac{1}{2} \times (4 - b) \times 3 = 9$

これを解くと、 $b = -2$

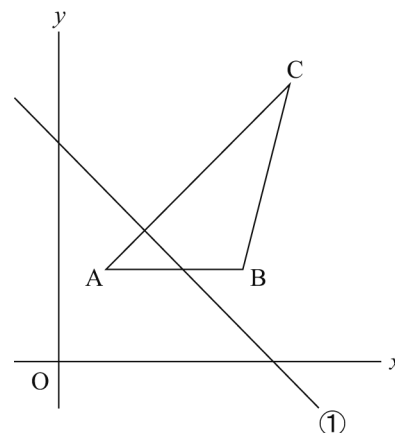
(2) 四角形 DBAC が正方形となる時の点 A の x 座標を a とすると、それぞれの点の座標は、

$A(a, -3)$, $B(-a, -3)$, $C\left(a, \frac{1}{4}a^2\right)$, $D\left(-a, \frac{1}{4}a^2\right)$ と表せる。AC=AB が成り立つので、

$\frac{1}{4}a^2 - (-3) = a - (-a)$ $a^2 - 8a + 12 = 0$ $(a-6)(a-2) = 0$ したがって、 $a = 2, 6$

[問題 3] (鹿児島 2022 年 2 月)

右の図は、直線 $y = -x + 2a$ …①と $\triangle ABC$ を示したものであり、3 点 A, B, C の座標は、それぞれ $(2, 4)$, $(8, 4)$, $(10, 12)$ である。このとき、次の問 1, 問 2 に答えなさい。



(1) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

直線①が線分 AB と交わるとき、直線①と線分 AB, AC の交点をそれぞれ P, Q とする。

このとき、次の(1)～(3)の問いに答えよ。

ただし、点 A と点 B のどちらか一方が直線①上にある場合も、直線①と線分 AB が交わっているものとする。

(2) 直線①が線分 AB と交わるときの a の値の範囲を求めよ。

(3) 点 Q の座標を a を用いて表せ。

(4) $\triangle APQ$ の面積が $\triangle ABC$ の面積の $\frac{1}{8}$ であるとき、 a の値を求めよ。

[解答欄]

(1)	24
(2)	$3 \leq a \leq 6$
(3)	$Q(a-1, a+1)$
(4)	$(a=)3+\sqrt{3}$

[解説]

(1) $\triangle ABC$ の底辺 AB の長さは 2 点 A, B の x 座標の差だから、 $8-2=6$,
高さは 2 点 B, C の y 座標の差だから、 $12-4=8$

よって、 $\triangle ABC = 6 \times 8 \times \frac{1}{2} = 24$

(2) 直線①の式が $y = -x + 2a$ であることから、直線①は 図 1

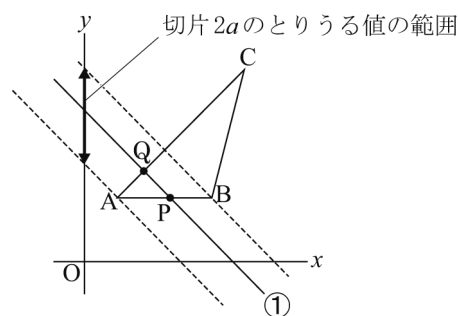
傾きを一定とし、切片が a の値によって変化する。

図 1 のように、切片 $2a$ が最小になるのは、直線①が点 A を通るときで、切片 $2a$ が最大になるのは、直線①が点 B を通るときである。

よって、点 A(2, 4)を通るとき、 $4 = -2 + 2a \Rightarrow a = 3$

点 B(8, 4)を通るとき、 $4 = -8 + 2a \Rightarrow a = 6$

したがって、 a のとりうる値の範囲は、 $3 \leq a \leq 6$



(3) 直線 AC の式を、 $y = mx + n$ とおく。2 点 A(2, 4), C(10, 12)を通ることから、それぞれを式に代入することで、 $4 = 2m + n$, $12 = 10m + n$ の 2 式を得る。

これらを連立方程式として解くことで、 $m = 1$, $n = 2$ よって、直線 AC の式は、 $y = x + 2$

点 Q は、直線①と直線 AC の交点だから、連立方程式 $\begin{cases} y = -x + 2a \\ y = x + 2 \end{cases}$ を解くことで、

点 Q の座標を求めることができる。

2 式の辺々を加えると、 $2y = 2a + 2 \Rightarrow y = a + 1$ これを、第 2 式に代入して、

$a + 1 = x + 2 \Rightarrow x = a - 1$ 以上のことから、点 Q の座標は、 $Q(a - 1, a + 1)$

(4) [求め方や計算過程]

点 P の x 座標を a を用いて表す。

点 P の y 座標は 4 であるから①に代入して

$$4 = -x + 2a$$

$$x = 2a - 4$$

$$\triangle APQ \text{ の面積は } (2a - 4 - 2)(a + 1 - 4) \times \frac{1}{2} = (a - 3)^2$$

よって、 $\triangle APQ$ の面積が $\triangle ABC$ の面積の $\frac{1}{8}$ であるとき

$$(a - 3)^2 = 24 \times \frac{1}{8}$$

$$a - 3 = \pm \sqrt{3}$$

$$a = 3 \pm \sqrt{3}$$

$$3 \leq a \leq 6 \text{ であるから } a = 3 + \sqrt{3}$$

[問題 4] (大分 2022 年 2 月)

下の図 1 のように、関数 $y = \frac{a}{x}$, $y = x + 5$, 関数 $y = -\frac{1}{3}x + b$ のグラフがある。

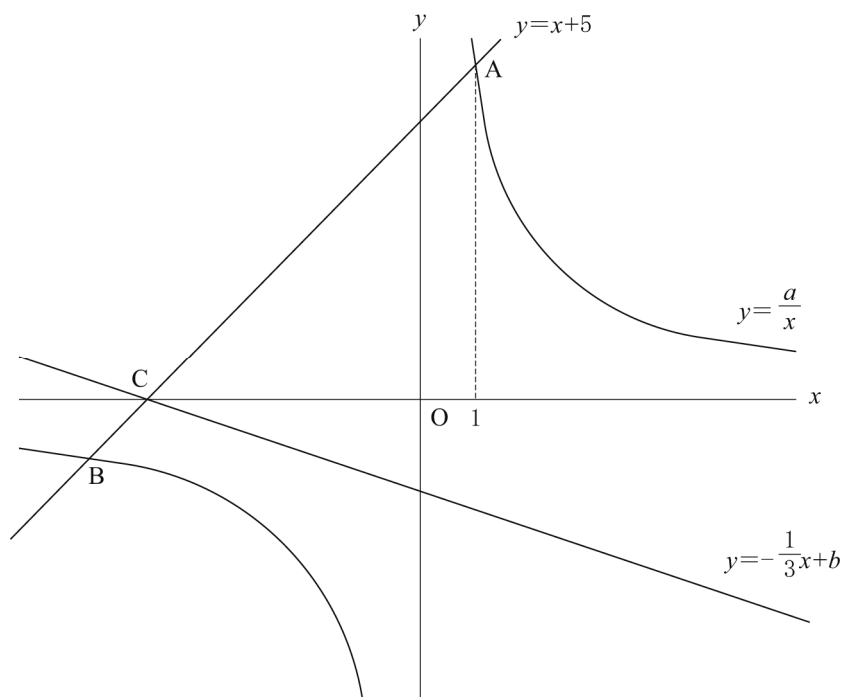
関数 $y = \frac{a}{x}$ と関数 $y = x + 5$ のグラフは 2 点 A, B で交わり, x 座標の大きい方の点を A, 小さい方の点を

B とする。点 A の x 座標は 1 である。また, 関数 $y = x + 5$ のグラフと x 軸との交点を C とし,

関数 $y = -\frac{1}{3}x + b$ のグラフは点 C を通る。

次の(1),(2)に答えなさい。

図 1



(1) a の値を求めなさい。

(2) b の値を求めなさい。

[解答欄]

(1)	$a = 6$
(2)	$b = -\frac{5}{3}$

[解説]

(1) 点 A は $y = x + 5$ のグラフ上の点なので, これに $x = 1$ を代入して, $y = 6$ よって, $A(1, 6)$

$y = \frac{a}{x}$ に代入して, $a = 6$

(2) 点 C は $y = x + 5$ のグラフ上の点なので, これに $y = 0$ を代入して, $x = -5$ よって, $C(-5, 0)$

$y = -\frac{1}{3}x + b$ に代入して, $b = -\frac{5}{3}$

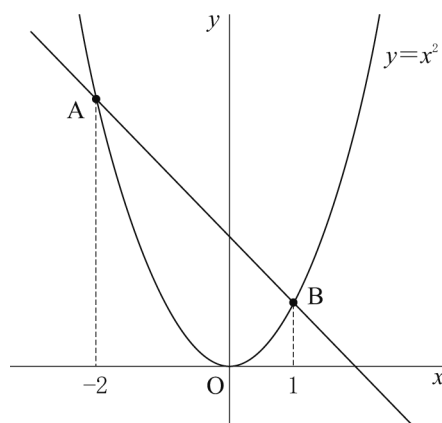
[問題 5] (長崎 2022 年 2 月)

図 1 ～図 3 のように、関数 $y=x^2$ のグラフ上に
2 点 A, B があり、2 点 A, B の x 座標はそれぞれ
-2, 1 である。

原点を O として、次の問いに答えなさい。

- (1) 点 A の y 座標を求めよ。
- (2) 直線 AB の式を求めよ。
- (3) $\triangle OAB$ の面積を求めよ。

図 1



[解答欄]

(1)	4
(2)	$y = -x + 2$
(3)	3

[解説]

(1)

図 1 のように点 A は x 座標が -2 であり、関数 $y=x^2$ のグラフ上にあるので、関数の式に $x=2$ を代入して、
 y 座標は $y=(-2)^2=4$

(2)

直線 AB は 2 点 A, B を通るから、点 B の座標を求める。

図 1 のように点 B は x 座標が 1 であり、関数 $y=x^2$ のグラフ上にあるので、関数の式に $x=1$ を代入して、 y 座標は、 $y=1^2=1$
よって、 $B(1, 1)$

問 1 より、 $A(-2, 4)$ である。

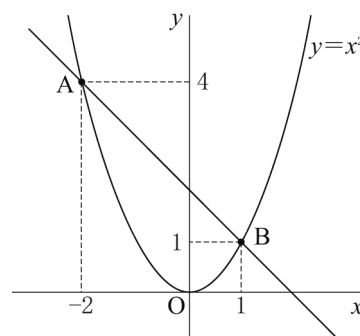
直線 AB の傾きは、 $\frac{1-4}{1-(-2)} = \frac{-3}{3} = -1$ だから、

直線 AB の式は、 $y=-x+b$ と表せる。

点 $A(-2, 4)$ を通るから、直線 AB の式に代入して、 $4=(-1) \times (-2) + b$ より、 $b=2$

よって、直線 AB の式は、 $y=-x+2$

図 1



ポイント 変化の割合

変化の割合とは、 x の値が増加したときに、 y の値がどれだけ変化するかを割合で示したもの。

[公式] 変化の割合 $= \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$ で求めることができる。

また、グラフの形状によって、注意点が異なる。

- ・直線のグラフ(比例 $y=ax$ ，一次関数 $y=ax+b$)

→変化の割合は一定で、定数 a の値に等しい。

- ・曲線のグラフ(反比例 $y=\frac{a}{x}$ ，関数 $y=ax^2$)

→変化の割合は区間により変化するため、[公式]を利用して計算する必要がある。

※関数 $y=ax^2$ において、 x の値が p から q まで増加するときの変化の割合は、 $a(p+q)$ で求められる。

ポイント 直線の式の求め方

① $y=ax+b$ とおく。

② その式に、「 a : 傾き，変化の割合」「 b : 切片」「 (x, y) : 対応する x, y の値の組，グラフが通る点の座標」のうち、2つの条件を見つけて代入する。

(3)

図2のように直線 AB と y 軸との交点を C とすると、問2より、 $C(0, 2)$ である。

$\triangle OAB = \triangle OAC + \triangle OBC$ である。 $\triangle OAC$ と $\triangle OBC$ の2つの三角形の底辺を OC とすると、 $OC=2$ であり、点 A の x 座標は $x=-2$ だから、 $\triangle OAC$ の高さは2である。点 B の x 座標は $x=1$ だから、 $\triangle OBC$ の高さは1である。したがって、

$$\triangle OAB = \triangle OAC + \triangle OBC$$

$$= \frac{1}{2} \times OC \times (\triangle OAC \text{ の高さ}) + \frac{1}{2} \times OC \times (\triangle OBC \text{ の高さ})$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 3$$

図2

