

第 5 章	数学(3 年)	高校入試過去問題	関数	3310
			$y = ax^2$	

[問題 1] (青森 2022 年 2 月)

関数 $y=ax^2$ について、 x の変域が $-2 \leq x \leq 3$ のとき、 y の変域は $-6 \leq y \leq 0$ である。

このとき、 a の値を求めなさい。

[解答欄]

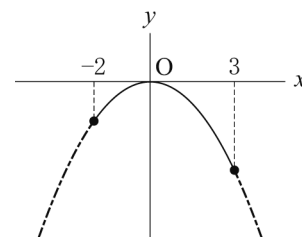
$$-\frac{2}{3}$$

[解説]

y の値は負の数をとることから、 $a < 0$ である。

よってグラフの形と y の変域を考えると (右図)、 $x=3$ のとき、最小値 -6 をとることが分かる。

これを $y=ax^2$ に代入して、 $-6=9a$ から、 $a=-\frac{2}{3}$



[問題 2] (石川 2022 年 2 月)

関数 $y=x^2$ について、 x の値が a から $a+3$ まで増加するときの変化の割合が 13 である。

このとき、 a の値を求めなさい

[解答欄]

$$a=5$$

[解説]

関数 $y=x^2$ において、 $x=a$ のとき、 $y=a^2$ $x=a+3$ のとき、 $y=(a+3)^2=a^2+6a+9$

変化の割合 $= \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}} = \frac{(a^2+6a+9)-a^2}{(a+3)-a} = 2a+3$ 変化の割合が 13 だから、 $2a+3=13$

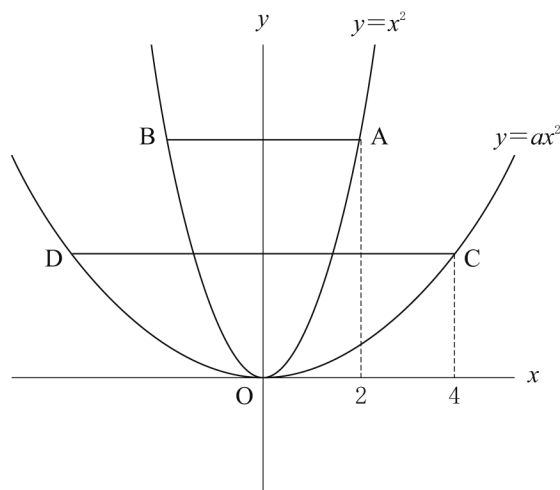
よって、 $a=5$

[問題 3] (栃木 2022 年 2 月)

右の図のように、2つの関数 $y=x^2$, $y=ax^2$ ($0 < a < 1$) のグラフがある。
 $y=x^2$ のグラフ上で x 座標が 2 である点を A とし、点 A を通り x 軸に平行な直線が $y=x^2$ のグラフと交わる点のうち、 A と異なる点を B とする。

また、 $y=ax^2$ のグラフ上で x 座標が 4 である点を C とし、点 C を通り x 軸に平行な直線が $y=ax^2$ のグラフと交わる点のうち、 C と異なる点を D とする。

このとき、次の(1), (2), (3)の問いに答えなさい。



- (1) $y=x^2$ のグラフと x 軸について対称なグラフを表す式を求めなさい。
- (2) $\triangle OAB$ と $\triangle OCD$ の面積が等しくなるとき、 a の値を求めなさい。
- (3) 直線 AC と直線 DO が平行になるとき、 a の値を求めなさい。

[解答欄]

(1)	$y = -x^2$
(2)	$(a =) \frac{1}{8}$
(3)	$a = \frac{1}{6}$

[解説]

- (2) 点 A の x 座標は 2 であり、点 B は y 軸に関して点 A と対称な点だから、
 点 B の x 座標は -2 である。よって、 $AB = 2 - (-2) = 4$
 点 A は、関数 $y=x^2$ のグラフ上にあるから、 y 座標は、 $y=2^2=4$

よって、 $\triangle OAB$ の底辺を AB とすると、高さは 4 だから、 $\triangle OAB = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

点 C の x 座標は 4 であり、点 D は y 軸に関して点 C と対称な点だから、
 点 D の x 座標は -4 である。よって、 $CD = 4 - (-4) = 8$
 点 C は、関数 $y=ax^2$ のグラフ上にあるから、 y 座標は、 $y=a \times 4^2 = 16a$

よって、 $\triangle OCD$ の底辺を CD とすると、高さは $16a$ だから、 $\triangle OCD = \frac{1}{2} \times 8 \times 16a = 64a$

よって、 $\triangle OAB = \triangle OCD$ より、 $64a = 8 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$

- (3) 直線 AC と直線 DO が平行であるとき、2つの直線の傾きは等しい。
 それぞれの傾きを求める。

直線 AC の傾きは、 $\frac{16a-4}{4-2}=8a-2$ ，直線 DO の傾きは、 $\frac{0-16a}{0-(-4)}=-4a$

傾きが等しいから、 $8a-2=-4a$ これを解いて、 $a=\frac{1}{6}$

[問題 4] (和歌山 2022 年 2 月)

図 1 のように、関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ …① のグラフ上に

点 A(−2, 1) がある。

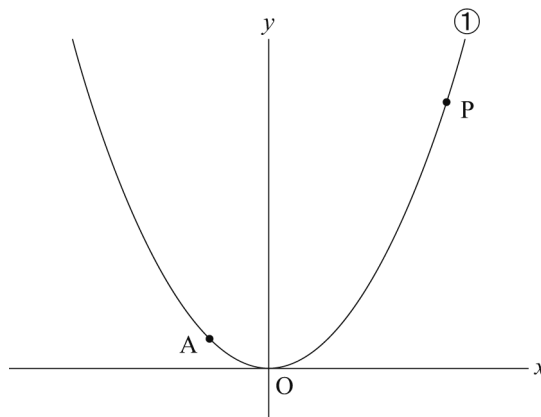
また、点 P は、①のグラフ上の点である。

次の(1)～(4)に答えなさい。

(1) 関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ について、 x の値が −2 から 0 まで

増加するときの変化の割合を求めなさい。

図 1



(2) 次の文中の(ア)，(イ)にあてはまる数を求めなさい。

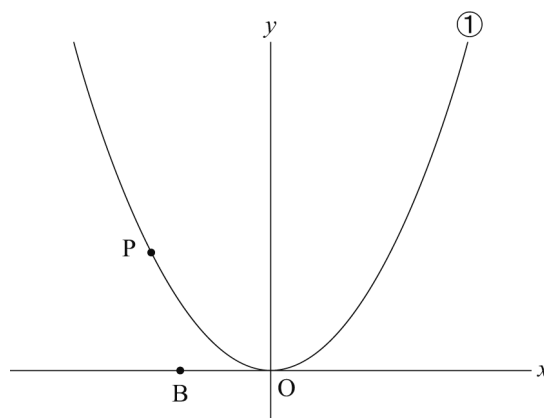
関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ について、 x の変域が $-2 \leq x \leq$ (ア) のとき、 y の変域は (イ) $\leq y \leq 9$ である。

(3) 図 2 のように、 x 軸上に点 B をとる。

P の x 座標が −4 のとき、 $\triangle OPB$ が二等辺三角形となるような B はいくつかある。

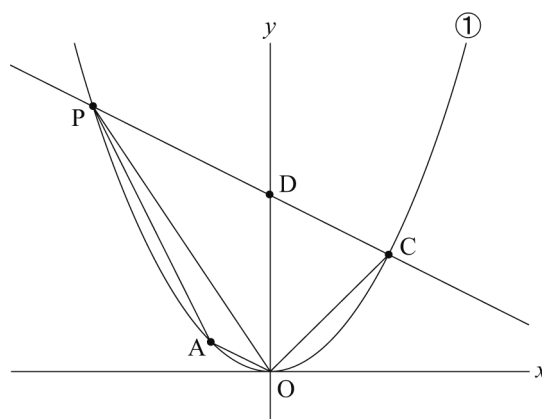
そのうち、 x 座標が最も大きい B の座標と、 x 座標が最も小さい B の座標を、それぞれ求めなさい。

図 2



- (4) 図3のように、①のグラフ上に点 $C(4, 4)$ があり、直線 PC と y 軸との交点を D とする。
 $\triangle OPD$ と $\triangle ODC$ の面積比が $3:2$ であるとき、 A を通り、四角形 $OAPC$ の面積を 2 等分する直線の式を求めなさい。

図3



[解答欄]

(1)	$-\frac{1}{2}$	
(2)	(ア)	6
	(イ)	0
(3)	x 座標が最も大きい座標 B $(4\sqrt{2}, 0)$	
	x 座標が最も小さい座標 B $(-8, 0)$	
(4)	$y = \frac{5}{2}x + 6$	

[解説]

【関数のグラフと図形，平面図形】

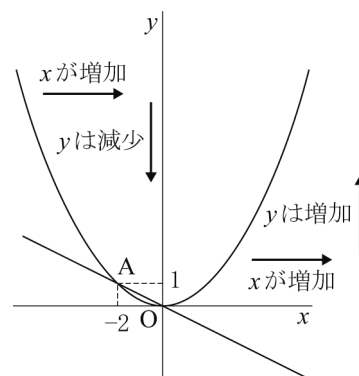
- (1) 1 $x = -2$ のとき、関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ 上の点 $A(-2, 1)$ より $y = 1$

$x = 0$ のとき、 $y = \frac{1}{4}x^2$ に $x = 0$ を代入して、 $y = 0$

変化の割合 $= \frac{y \text{ の増加量 }}{x \text{ の増加量 }}$ だから、

$$\frac{0-1}{0-(-2)} = -\frac{1}{2}$$

図1



ポイント 変化の割合

変化の割合とは、 x の値が増加したときに、 y の値がどれだけ変化するかを割合で示したもの。

[公式] 変化の割合 $= \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$ で求めることができる。

また、グラフの形状によって、注意点が異なる。

・直線のグラフ(比例 $y=ax$ ，一次関数 $y=ax+b$)

→変化の割合は一定で、定数 a の値に等しい。

・曲線のグラフ(反比例 $y=\frac{a}{x}$ ，関数 $y=ax^2$)

→変化の割合は区間により変化するため、[公式]を利用して計算する必要がある。

※関数 $y=ax^2$ において、 x の値が p から q まで増加するときの変化の割合は、 $a(p+q)$ で求められる。

(2) $x=-2$ のとき、 $y=1$ であり、このとき、 x が増加して $x=0$ になるまで y は減少する。

$x=0$ のとき、 $y=0$ であり、 $x>0$ では x が増加すると y も増加する。

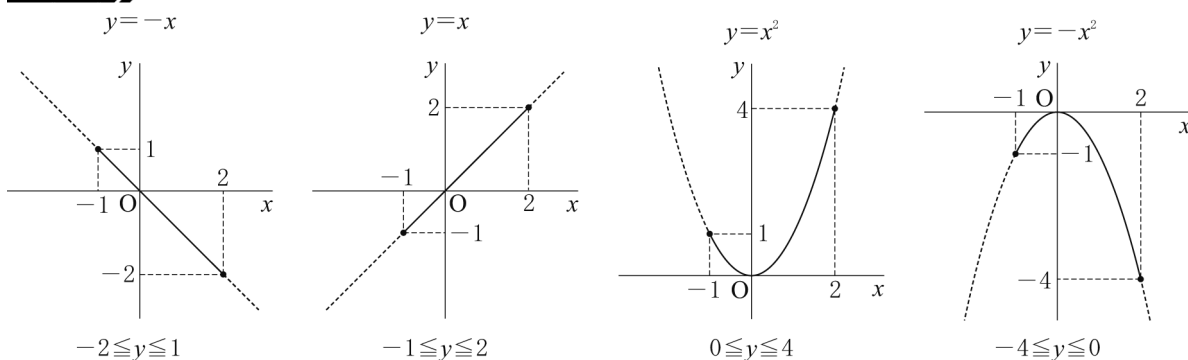
$y \leq 9$ だから、 $-2 \leq x$ の範囲で $y=9$ となるのは、関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ に $y=9$ を代入して、 $x^2=36$ 、

$-2 \leq x$ より $x=6$ のときである。

したがって、 $-2 \leq x \leq 6$ よって、 $\mathcal{A}$ は 6

図 1 のように $x=-2$ から x が増加するとき、 $x=0$ になるまで y は減少し、このとき $y=0$ になる。

さらに x が増加すると y も増加する。したがって、 $0 \leq y \leq 9$ よって、 $\mathcal{I}$ は 0

ポイント 変域の問題はグラフで考えよう！

特に、関数 $y=ax^2$ の変域を求めるときに注意しよう。

(3) P の x 座標は -4 だから, $x = -4$ を関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ に代入して, $P(-4, 4)$

$\triangle OPB$ は二等辺三角形だから,

図 2 のように $OP = PB$ のとき,

図 3 のように $PB = OB$ のとき,

図 4・図 5 のように $OP = OB$ のときがある。

よって, この中で x 座標が最も大きいのは,

あきらかに図 4 のときであるから,

$OP = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ より, B の x 座標は $4\sqrt{2}$
よって, $B(4\sqrt{2}, 0)$

図 2

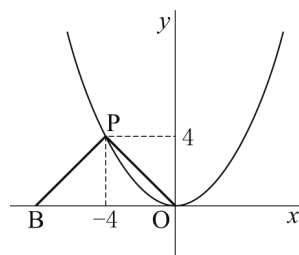


図 3

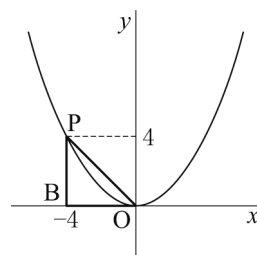


図 4

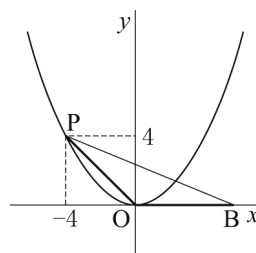
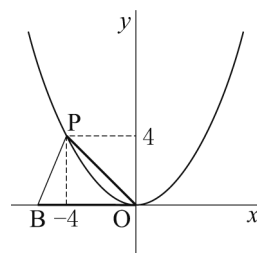


図 5



(4) 考え方の流れを整理する。

i) 点 P の座標を求める。

ii) 求める直線と直線 PC との交点を Q として, Q の条件を調べる。

iii) Q の条件より Q の座標を求め, 直線の式を求める。

i) について

$\triangle ODP$ と $\triangle ODC$ において, 2 つの三角形の底辺をともに OD
とすると, 底辺が共通だから,

$\triangle ODP$ と $\triangle ODC$ の高さの比は $\triangle ODP$ と $\triangle ODC$ の面積の比と
等しくなる。

$\triangle ODC$ の高さは C の x 座標だから 4

$\triangle ODP : \triangle ODC = (\triangle ODP \text{ の高さ}) : (\triangle ODC \text{ の高さ})$

$= (\triangle ODP \text{ の高さ}) : 4 = 3 : 2$

$(\triangle ODP \text{ の高さ}) = 6$

図 6

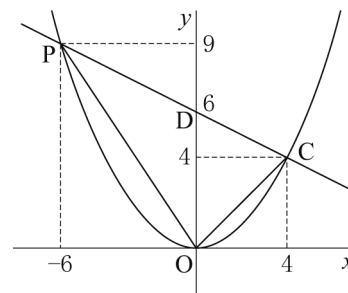


図 6 のように P の x 座標は $x < 0$ であり, $\triangle ODP$ の高さは 6 だから, P の x 座標は -6

$y = \frac{1}{4}x^2$ に $x = -6$ を代入して, $y = 9$ $P(-6, 9)$

ii)について

$P(-6, 9)$ だから、直線 PC の傾きは、 $\frac{4-9}{4-(-6)} = -\frac{1}{2}$

$A(-2, 1)$ より直線 OA の傾きは $-\frac{1}{2}$ だから、

(直線 OA の傾き)=(直線 PC の傾き)

したがって、四角形 $OAPC$ は $OA \parallel PC$ の図 7 のような台形であり、この台形を図 8 のように分割し、 $\triangle OAC$, $\triangle ACQ$, $\triangle APQ$ の底辺をそれぞれ OA , CQ , PQ とすると、3 つの三角形の高さはすべて等しくなる。

このため、 $\triangle OAC$, $\triangle ACQ$, $\triangle APQ$ の面積の比はそれぞれの底辺の比と等しくなる。

四角形 $OAPC$ は直線 AQ により 2 等分されるので、

(四角形 $OACQ$ の面積) : $\triangle APQ$

$= (\triangle OAC + \triangle ACQ) : \triangle APQ = (OA + CQ) : PQ = 1 : 1$

$A(-2, 1)$ だから、 $OA = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$C(4, 4)$, $P(-6, 9)$ だから、 $CP = \sqrt{(-6-4)^2 + (9-4)^2} = 5\sqrt{5}$

$(OA + CQ) : PQ = (\sqrt{5} + CQ) : (5\sqrt{5} - CQ) = 1 : 1$

したがって、 $\sqrt{5} + CQ = 5\sqrt{5} - CQ$ $CQ = 2\sqrt{5}$

図 9 のように 3 点 $(-6, 9)$, $(-6, 4)$, $(4, 4)$ を頂点とする斜辺が CP の直角三角形で考えると、

$CP : CQ = 5\sqrt{5} : 2\sqrt{5} = 5 : 2$ より、

Q の x 座標は C の x 座標より 4 小さいから、 $x = 4 - 4 = 0$,

Q の y 座標は C の y 座標より 2 大きいので、 $y = 4 + 2$,

よって、 $Q(0, 6)$

図 7

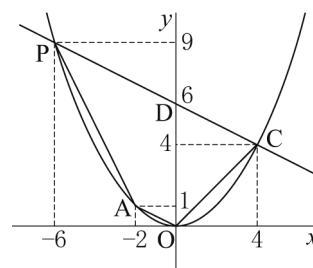


図 8

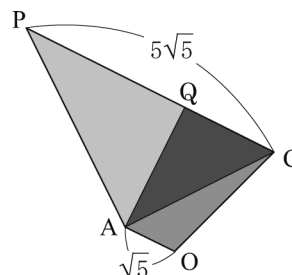
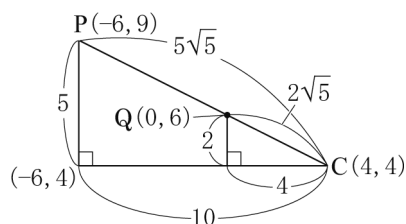


図 9



iii)について

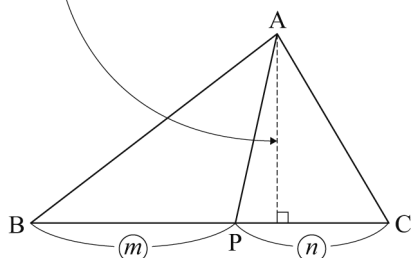
直線 AQ は $A(-2, 1)$, $Q(0, 6)$ を通るから、傾きは、 $\frac{6-1}{0-(-2)} = \frac{5}{2}$

直線 AQ は $y = \frac{5}{2}x + b$ と表され、 $Q(0, 6)$ を通るから、 $6 = \frac{5}{2} \times 0 + b$ $b = 6$

直線 AQ の式は $y = \frac{5}{2}x + 6$

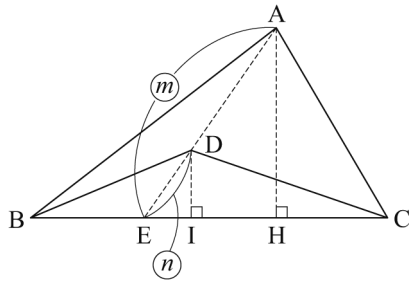
ポイント 面積比は 3 パターン !

① 高さが共通 → 底辺の比 = 面積比



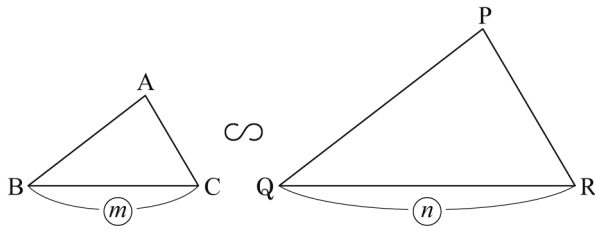
$\triangle ABP : \triangle ACP = BP : PC = m : n$

② 底辺が共通→高さの比=面積比



$\triangle AEH \sim \triangle DEI$ より, $AH : DI = AE : DE$
 $\triangle ABC : \triangle DBC = AH : DI = AE : DE = m : n$

③ 相似→相似比の2乗



$\triangle ABC \sim \triangle PQR$ で, 相似比が $m : n$ のとき,
 $\triangle ABC : \triangle PQR = m^2 : n^2$