

第 9 章	数学(3 年)	高校入試過去問題	関数	3330
			$y = ax^2$ の利用	

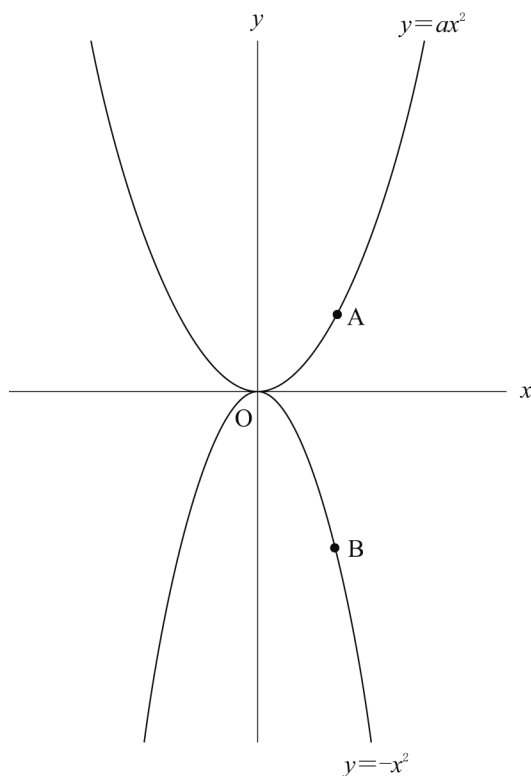
[問題 1] (岡山 2022 年 2 月)

図 1 のように、関数 $y = ax^2$ のグラフ上に点 A が、関数 $y = -x^2$ のグラフ上に点 B があります。

2 点 A, B の x 座標は等しく、ともに正であるとします。

問(1)～問(5)に答えなさい。ただし、 $a > 0$ 、点 O は原点とします。

図 1



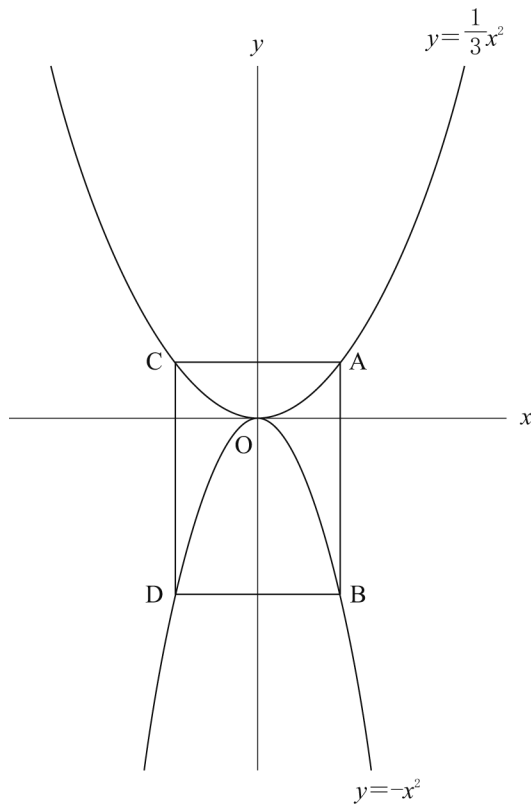
点 A の座標が $(2, 2)$ のとき、(1)～(3)に答えなさい。

- (1) a の値を求めなさい。
- (2) 点 B の y 座標を求めなさい。
- (3) 関数 $y = -x^2$ のグラフ上に点 P があり、 $\triangle OAB$ と $\triangle PAB$ の面積の比が $2 : 3$ となるとき、点 P の x 座標をすべて求めなさい。

$a=\frac{1}{3}$ としたとき、図2のように、関数 $y=\frac{1}{3}x^2$ のグラフ上に、点 A と y 座標が等しく x 座標が異なる点 C をとります。

また、関数 $y=-x^2$ のグラフ上に、点 B と y 座標が等しく x 座標が異なる点 D をとり、四角形 ACDB をつくります。(4)、(5)に答えなさい。

図 2



- (4) 点 A の x 座標を t とするとき、線分 AC の長さを t を使って表しなさい。
 (5) 四角形 ACDB の周の長さが 12 となるとき、点 A の座標を求めなさい。

[解答欄]

(1)	$a=\frac{1}{2}$
(2)	-4
(3)	$-1, 5$
(4)	$2t$
(5)	$(\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$

【解説】

(1) 関数 $y=ax^2$ のグラフ上に点 $A(2, 2)$ があることから, $2=a \times 2^2 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

(2) 点 B の x 座標は, 点 A の x 座標と等しいので, 2 である。

点 B が関数 $y=-x^2$ のグラフ上にあることから, その y 座標は, $y=-2^2=-4$

(3) $\triangle OAB$ と $\triangle PAB$ の面積比は, 辺 AB が共通であることから, 底辺を AB としたときの高さの比に等しくなる。 $\triangle OAB$ の高さは, 2 点 A, O の x 座標の差だから, 2 である。

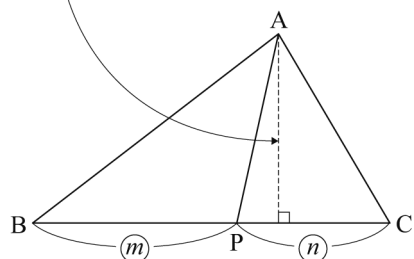
よって, $2 : (\triangle PAB \text{ の高さ}) = 2 : 3 \Rightarrow (\triangle PAB \text{ の高さ}) = 3$

点 P の x 座標が点 A の x 座標よりも小さいとき, $(\text{点 } P \text{ の } x \text{ 座標}) = (\text{点 } A \text{ の } x \text{ 座標}) - 3 = 2 - 3 = -1$

点 P の x 座標が点 A の x 座標よりも大きいとき, $(\text{点 } P \text{ の } x \text{ 座標}) = (\text{点 } A \text{ の } x \text{ 座標}) + 3 = 2 + 3 = 5$

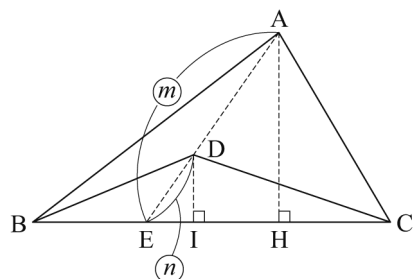
ポイント▶▶ 面積比は 3 パターン！

① 高さが共通 → 底辺の比 = 面積比



$$\triangle ABP : \triangle ACP = BP : PC = m : n$$

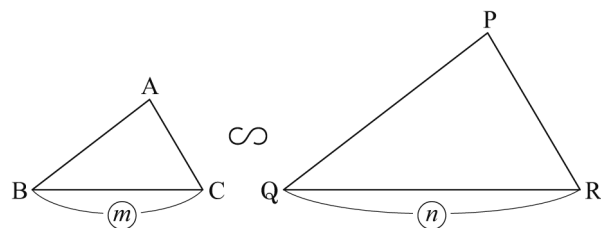
② 底辺が共通 → 高さの比 = 面積比



$\triangle AEH \sim \triangle DEI$ より, $AH : DI = AE : DE$

$$\triangle ABC : \triangle DBC = AH : DI = AE : DE = m : n$$

③ 相似 → 相似比の 2 乗



$\triangle ABC \sim \triangle PQR$ で, 相似比が $m : n$ のとき,

$$\triangle ABC : \triangle PQR = m^2 : n^2$$

(4) 点 C は、y 軸に関して点 A と対称だから、点 C の x 座標は、 $-t$ である。

よって、 $AC=t-(-t)=2t$

(5) 点 A が関数 $y=\frac{1}{3}x^2$ のグラフ上にあることから、

その y 座標は、 $y=\frac{1}{3}t^2$ である。

また、点 B の x 座標は、点 A の x 座標と等しく、

点 B が関数 $y=-x^2$ のグラフ上にあることから、

その y 座標は、 $y=-t^2$

よって、 $AB=\frac{1}{3}t^2-(-t^2)=\frac{4}{3}t^2$

したがって、点 D も点 B と y 軸に関して対称だから、

四角形 ACDB は長方形である。

よって、図 1 のように、その周の長さは、 $2(AC+AB)=2\left(2t+\frac{4}{3}t^2\right)$

である。

よって、 $2\left(2t+\frac{4}{3}t^2\right)=12 \Rightarrow 2t^2+3t-9=0$

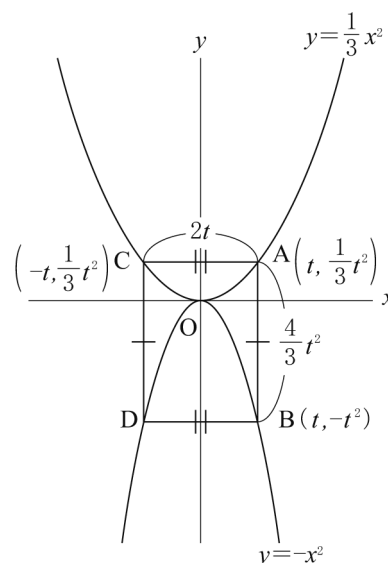
$$\Rightarrow t=\frac{-3\pm\sqrt{32-4\times 2\times(-9)}}{2\times 2}=\frac{-3\pm\sqrt{81}}{4}=\frac{-3\pm 9}{4}$$

$$\Rightarrow t>0 \text{ より、} t=\frac{-3+9}{4}=\frac{3}{2}$$

よって、点 A の y 座標は、 $y=\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$ だから、

点 A の座標は、 $A\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$

図 1



[問題 2] (香川 2022 年 2 月)

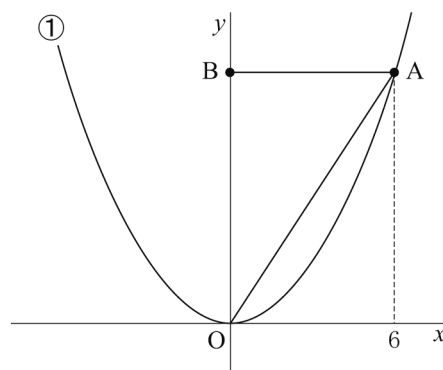
右の図で、点 O は原点であり、放物線①は関数

$$y = \frac{1}{4}x^2 \text{ のグラフである。}$$

点 A は放物線①上の点で、その x 座標は 6 である。

点 A を通り、x 軸に平行な直線をひき、y 軸との交点を B とする。また、点 O と点 A を結ぶ。

これについて、次の(1)、(2)の問いに答えよ。



(1) 関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ について、x の値が -3 から -1 まで

増加するときの変化の割合を求めよ。

(2) x 軸上に、x 座標が負の数である点 P をとり、点 P と点 B を結ぶ。∠OAB = ∠BPO であるとき、直線 AP の式を求めよ。

[解答欄]

(1)	-1
(2)	$y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{2}$

[解説]

(1) $x = -3$ のとき $y = \frac{9}{4}$ 、 $x = -1$ のとき $y = \frac{1}{4}$ である。よって、(x の増加量) $= -1 - (-3) = 2$,

(y の増加量) $= \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = -2$ であり、変化の割合 $= \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}} = \frac{-2}{2} = -1$

ポイント 変化の割合

変化の割合とは、x の値が増加したときに、y の値がどれだけ変化するかを割合で示したもの。

[公式] 変化の割合 $= \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$ で求めることができる。

また、グラフの形状によって、注意点が異なる。

・直線のグラフ(比例 $y = ax$ 、一次関数 $y = ax + b$)

→変化の割合は一定で、定数 a の値に等しい。

・曲線のグラフ(反比例 $y = \frac{a}{x}$ 、関数 $y = ax^2$)

→変化の割合は区間により変化するため、[公式]を利用して計算する必要がある。

※関数 $y = ax^2$ において、x の値が p から q まで増加するときの変化の割合は、 $a(p+q)$ で求められる。

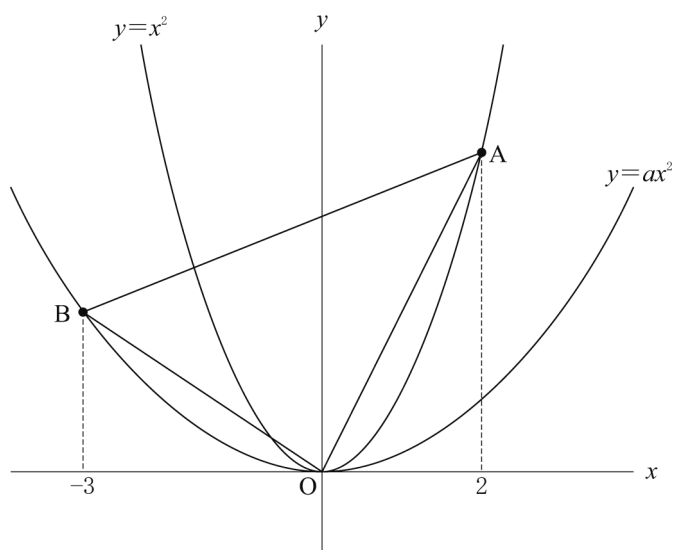
(2) ∠OAB = ∠BPO, 辺 BO は共通, ∠OBA = ∠BOP = 90° であり, ∠AOB = ∠PBO もいえるから, 1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので, △OAB ≅ △BPO となる位置に点 P はある。よって, OP = AB = 6 となればよく, P(-6, 0) と分かる。また, 放物線上の点である点 A(6, 9) であることから, 2 点 A, P を通る直線の式を求めればよい。

[問題 3] (山口 2022 年 2 月)

関数 $y=ax^2$ について、次の問(1)、問(2)に答えなさい。

(1) 関数 $y=x^2$ について、 x の値が 1 から 2 まで増加したときの変化の割合は 3 である。
 x の値が -3 から -1 まで増加したときの変化の割合を求めなさい。

(2) 図のように、関数 $y=x^2$ のグラフ上に x 座標が 2 となる点 A をとる。
 また、 $a>0$ である関数 $y=ax^2$ のグラフ上に x 座標が -3 となる点 B をとる。
 $\triangle OAB$ の面積が 8 となるときの、 a の値を求めなさい。



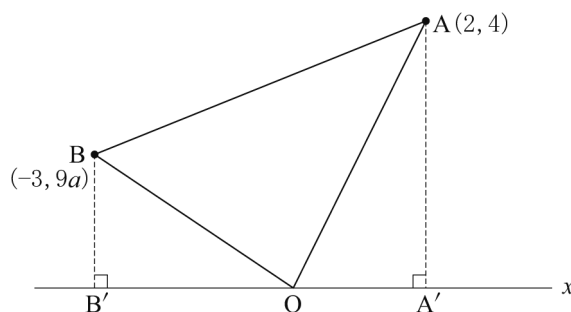
[解答欄]

(1)	-4
(2)	$a=\frac{2}{9}$

[解説]

(1) $x=-3$ のとき $y=9$, $x=-1$ のとき $y=1$ であり、変化の割合 $=\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=\frac{1-9}{-1-(-3)}=-4$

(2) $A(2, 4)$, $B(-3, 9a)$ である。2 点 A, B から、それぞれ x 軸におろした垂線を AA' , BB' とすると、
 $\triangle OAB = \text{台形 } ABB'A' - \triangle OAA' - \triangle OBB' = \frac{1}{2} \times (4+9a) \times \{2-(-3)\} - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 3 \times 9a$
 $= 6+9a$ $\triangle OAB$ の面積が 8 になればよいので、 $8=6+9a$ から、 $a=\frac{2}{9}$



[問題 4] (徳島 2022 年 2 月)

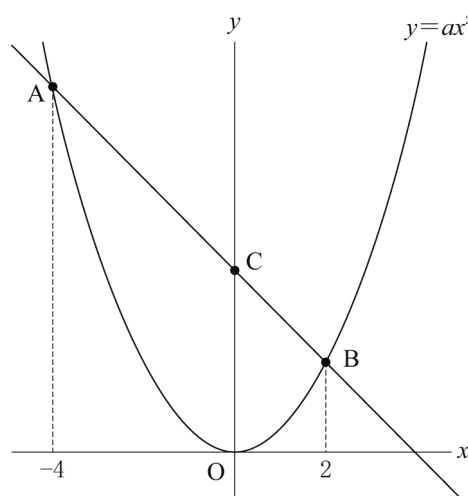
下の図のように、関数 $y=ax^2$ ($a>0$) のグラフ上に 2 点 A, B があり、点 A の x 座標は -4 、点 B の x 座標は 2 である。また、直線 AB と y 軸との交点を C とする。問(1)～問(4)に答えなさい。

(1) 点 A の y 座標が 6 のとき、点 O を回転の中心として、点 A を点対称移動した点の座標を求めなさい。

(2) $a=\frac{1}{2}$ のとき、線分 AB の長さを求めなさい。

$a=1$ のとき、(3)・(4)に答えなさい。

(3) $\triangle OAB$ の面積を求めなさい。



(4) 線分 AC の中点を P とし、点 Q を関数 $y=ax^2$ のグラフ上にとる。 $\triangle OAB$ と $\triangle OPQ$ の面積が等しくなるときの点 Q の x 座標を求めなさい。ただし、点 Q の x 座標は正とする。

[解答欄]

(1)	(4, -6)
(2)	$6\sqrt{2}$
(3)	24
(4)	$-3+\sqrt{33}$

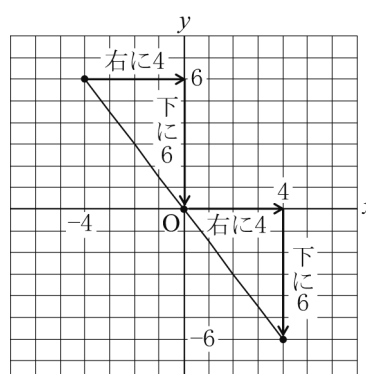
[解説]

(1) 点 A の x 座標は -4 、 y 座標は 6

図 1 のように点を移動させると、原点に関して対称な点はいもとの点の x 座標と y 座標の符号を変えたものであるから、 x 座標は 4 、 y 座標は -6 の点である。

よって、 $(4, -6)$

図 1



(2) $a=\frac{1}{2}$ のとき、関数の式は $y=\frac{1}{2}x^2$ である。

点 A は x 座標が -4 であり、点 A は関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上にあるので、この関数の式に $x=-4$ を代入して、

$$y \text{ 座標は } y=\frac{1}{2} \times (-4)^2=8$$

したがって、 $A(-4, 8)$

点 B は x 座標が 2 だから、関数の式に $x=2$ を代入して、

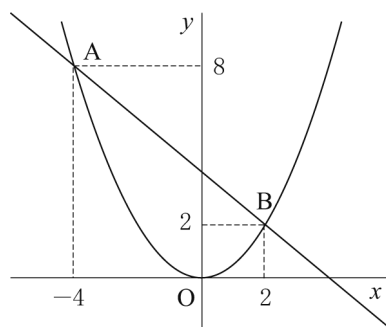
$$y \text{ 座標は } y=\frac{1}{2} \times 2^2=2$$

したがって、 $B(2, 2)$

$$AB^2=\{(2-(-4))\}^2+(8-2)^2=72$$

$$AB>0 \text{ だから、} AB=6\sqrt{2}$$

図 2



(3) $a=1$ のとき、関数の式は $y=x^2$ である。

このとき、点 A の座標は、 $(-4, 16)$ 、点 B の座標は $(2, 4)$ である。

点 A, B から、x 軸にひいた垂線と x 軸との交点を図 3 のようにそれぞれ R, S とする。

四角形 ARSB は、 $AR \parallel BS$ の台形で、

上底と下底を AR, BS としたとき、高さは、RS である。

$AR=16$, $BS=4$, $RS=6$ だから、その面積は

$$\frac{1}{2} \times (AR+BS) \times RS = \frac{1}{2} \times (16+4) \times 6 = 60$$

$\triangle OAR$ の底辺を OR とすると高さは AR,

$\triangle OBS$ の底辺を OS とすると高さは BS,

$$\triangle OAR + \triangle OBS = \frac{1}{2} \times OR \times AR + \frac{1}{2} \times OS \times BS$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 16 + \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 36$$

$$\triangle OAB = (\text{四角形 ARSB の面積}) - (\triangle OAR + \triangle OBS) = 60 - 36 = 24$$

(別解)

$a=1$ のとき、関数の式は $y=x^2$ である。

このとき、点 A の座標は、 $(-4, 16)$ 、点 B の座標は $(2, 4)$ である。

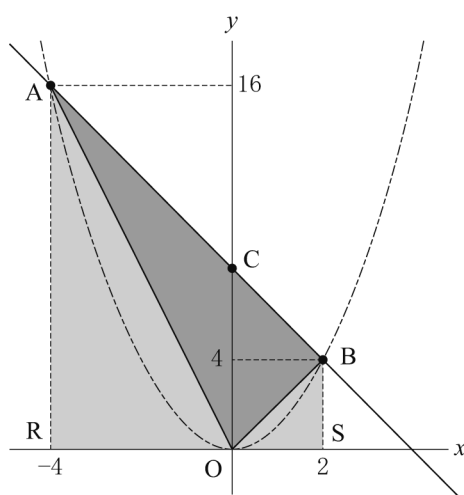
直線 AB の傾きは、 $\frac{4-16}{2-(-4)} = -\frac{12}{6} = -2$ だから、直線 AB の式は、 $y=-2x+b$ と表される。

点 B(2, 4) を通るから、直線 AB の式に代入して、 $4=(-2) \times 2 + b$ より、 $b=8$

したがって、直線 AB の式は、 $y=-2x+8$

直線 AB と y 軸との交点を C とすると、 $C(0, 8)$

図 3



$$\triangle OAB = \triangle OAC + \triangle OBC$$

$\triangle OAC$ と $\triangle OBC$ の底辺をそれぞれ OC とする。

このとき、点 A の x 座標は -4 だから $\triangle OAC$ の高さは 4

点 B の x 座標は 2 だから高さは 2 また、 $OC=8$ だから、

$$\triangle OAB = \triangle OAC + \triangle OBC = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 + \frac{1}{2} \times 8 \times 2 = 16 + 8 = 24$$

(4) (1)の別解より、直線 AB の式は、 $y = -2x + 8$ だから、
直線 AB と y 軸との交点の座標は $C(0, 8)$

よって、線分 AC の中点 P の x 座標は $\frac{-4+0}{2} = -2$,

$$y \text{ 座標は } \frac{16+8}{2} = 12$$

したがって、点 P の座標は図 4 のように $P(-2, 12)$ である。

点 Q の x 座標を t とすると、 Q は関数 $y = x^2$ のグラフ上にあるので、 $Q(t, t^2)$

点 P, Q から、 x 軸にひいた垂線と x 軸との交点をそれぞれ T, U とする。

四角形 $PTUQ$ は、 $PT \parallel QU$ の台形で、上底と下底をそれぞれ PT, QU としたとき、高さは TU である。

$PT=12, QU=t^2, TU=t+2$ だから、その面積は、

$$\frac{1}{2} \times (PT + QU) \times TU = \frac{1}{2} \times (12 + t^2) \times (t + 2) = \frac{t^3}{2} + t^2 + 6t + 12$$

$\triangle OPT$ の底辺を OT とすると高さは PT 、 $\triangle OQU$ の底辺を OU とすると高さは QU だから、

$$\triangle OPT + \triangle OQU = \frac{1}{2} \times OT \times PT + \frac{1}{2} \times OU \times QU = \frac{1}{2} \times 2 \times 12 + \frac{1}{2} \times t \times t^2 = \frac{t^3}{2} + 12$$

$$\triangle OPQ = (\text{四角形 } PTUQ \text{ の面積}) - (\triangle OPT + \triangle OQU)$$

$$= \frac{t^3}{2} + t^2 + 6t + 12 - \left(\frac{t^3}{2} + 12 \right) = t^2 + 6t$$

(1)より、 $\triangle OAB = 24$ であり、 $\triangle OAB = \triangle OPQ$ だから、 $24 = t^2 + 6t$

整理して、 $t^2 + 6t - 24 = 0$

二次方程式の解の公式より、 $t = -3 \pm \sqrt{33}$

$t > 0$ だから、 $t = -3 + \sqrt{33}$

図 4

