

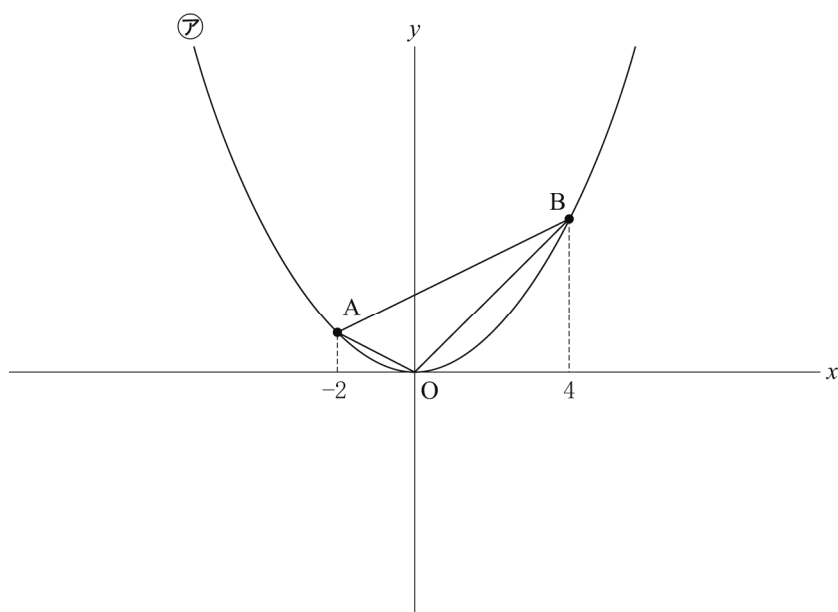
第 14 章	数学(3 年)	高校入試過去問題	平面図形	4160
			三平方の定理	

[問題 1] (三重 2022 年 2 月)

次の図のように、関数 $y = \frac{1}{4}x^2 \cdots \textcircled{P}$ のグラフ上に 2 点 A, B があり、
点 A の x 座標が -2 、点 B の x 座標が 4 である。

3 点 O, A, B を結び $\triangle OAB$ をつくる。

このとき、あとの各問いに答えなさい。ただし、原点を O とする。



(1) 点 A の座標を求めなさい。

(2) 2 点 A, B を通る直線の式を求めなさい。

(3) x 軸上の $x > 0$ の範囲に 2 点 C, D をとり、 $\triangle ABC$ と $\triangle ABD$ をつくる。

このとき、 $\triangle OAB$ の面積と $\triangle ABC$ の面積の比が $1 : 3$ となるときの、点 C の座標を求めなさい。

(4) また、 $\triangle ABD$ が $\angle ADB = 90^\circ$ の直角三角形となるときの、点 D の座標を求めなさい。

[解答欄]

(1)	$A(-2, 1)$
(2)	$y = \frac{1}{2}x + 2$
(3)	$C(8, 0)$
(4)	$D(1 + \sqrt{5}, 0)$

[解説]

(1) 図 1 のように、点 A は x 座標が -2 であり、関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフ上にあるので、関数の式に $x = -2$ を代入して、 y 座標は、 $y = \frac{1}{4} \times (-2)^2 = 1$ よって、 $A(-2, 1)$

(2) 図 1 のように点 B は x 座標が 4 であり、関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフ上にあるので、関数の式に $x = 4$ を代入して、 y 座標は、 $y = \frac{1}{4} \times 4^2 = 4$ したがって、 $B(4, 4)$

直線 AB の傾きは、 $\frac{4-1}{4-(-2)} = \frac{1}{2}$ だから、直線 AB の式は、 $y = \frac{1}{2}x + b$ と表される。

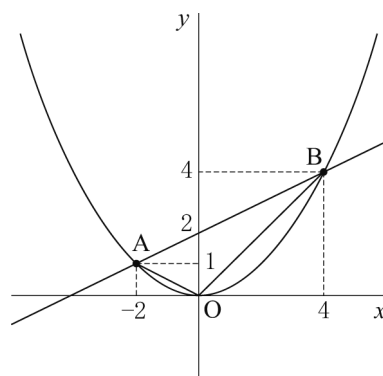
点 $A(-2, 1)$ を通るから、 $1 = \frac{1}{2} \times (-2) + b$ より、 $b = 2$

よって、直線 AB の式は、 $y = \frac{1}{2}x + 2$

ポイント 直線の式の求め方

- ① $y = ax + b$ とおく。
- ② その式に、「 a : 傾き、変化の割合」「 b : 切片」「 (x, y) : 対応する x, y の値の組、グラフが通る点の座標」のうち、2 つの条件を見つけて代入する。

図 1



- (3) 図2のように, $\triangle OAB : \triangle ABC = 1 : 3$ となる点 C の x 座標を $t (t > 0)$ とする。

AB と y 軸との交点を P, 点 C を通り AB に平行な直線と y 軸との交点を Q とする。

AB の傾きは $\frac{1}{2}$ だから, CQ の傾きも $\frac{1}{2}$ なので,

$$\frac{OQ}{OC} = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって, } OQ = \frac{1}{2} OC = \frac{t}{2}$$

AB // CQ より, $\triangle ABC = \triangle ABQ$ だから,

$$\triangle OAB : \triangle ABQ = 1 : 3$$

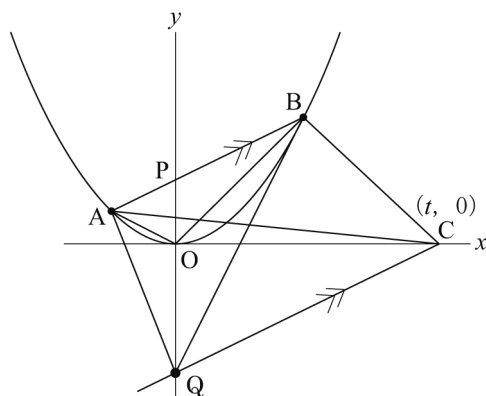
$$OP : PQ = \triangle OAB : \triangle ABQ = 1 : 3 \text{ より,}$$

$$OP : OQ = 1 : 2$$

$$P(0, 2) \text{ より, } OP = 2 \text{ だから, } 2 : \frac{t}{2} = 1 : 2 \quad t = 8$$

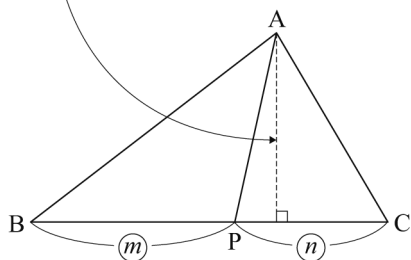
よって, C(8, 0)

図 2



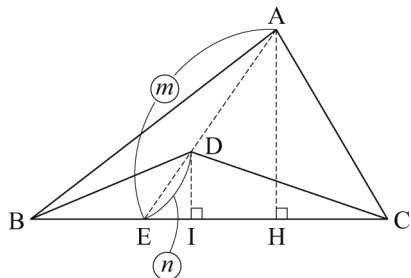
ポイント▶▶面積比は3パターン!

- ① 高さが共通→底辺の比=面積比



$$\triangle ABP : \triangle ACP = BP : PC = m : n$$

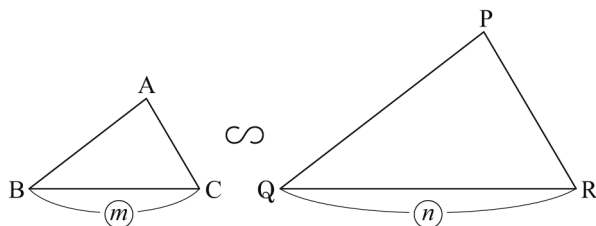
- ② 底辺が共通→高さの比=面積比



$$\triangle AEH \sim \triangle DEI \text{ より, } AH : DI = AE : DE$$

$$\triangle ABC : \triangle DBC = AH : DI = AE : DE = m : n$$

- ③ 相似→相似比の2乗



$$\triangle ABC \sim \triangle PQR \text{ で, 相似比が } m : n \text{ のとき,}$$

$$\triangle ABC : \triangle PQR = m^2 : n^2$$

- (4) $\angle ADB = 90^\circ$ より, $\triangle ADB$ は辺 AB を斜辺とする直角三角形である。

直角三角形の 3 つの頂点は斜辺を直径とする円の円周上にあるから, 点 D は斜辺 AB を直径とする円の円周上の点である。

この円の中心は AB の中点だから, $\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{1+4}{2}\right)$ よって,

$$\left(1, \frac{5}{2}\right),$$

この中点を $M\left(1, \frac{5}{2}\right)$ とする。 D は x 軸上の点だから,

$$D(p, 0) \ (p > 0) \text{ とすると, } DM^2 = (1-p)^2 + \left(\frac{5}{2} - 0\right)^2 = p^2 - 2p + \frac{29}{4}$$

$$AM^2 = \{1 - (-2)\}^2 + \left(\frac{5}{2} - 1\right)^2 = \frac{45}{4}$$

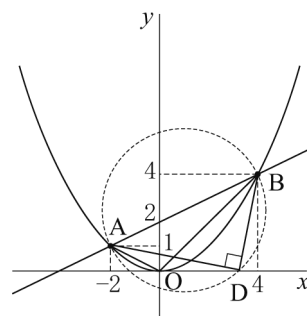
円の半径だから, $AM = DM$ であり, $AM^2 = DM^2$ である。

したがって, $AM^2 = DM^2$ より, $\frac{45}{4} = p^2 - 2p + \frac{29}{4}$ だから, $p^2 - 2p - 4 = 0$

二次方程式の解の公式より, $p = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$

$p > 0$ だから, $p = 1 + \sqrt{5}$ よって, $D(1 + \sqrt{5}, 0)$

図 3



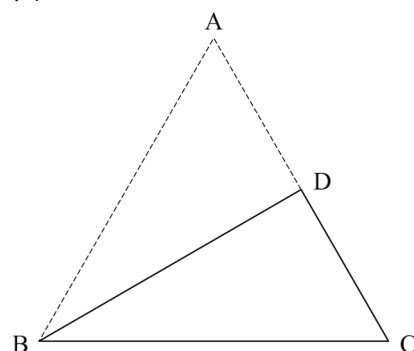
[問題 2] (長野 2022 年 2 月)

1 辺の長さが 6 cm の正三角形 ABC がある。

(1) 図 1 は、正三角形 ABC を、頂点 A が頂点 C に重なるように折り曲げたとき、折り目の線分を BD としたものである。

このとき、BD の長さを求めなさい。

図 1

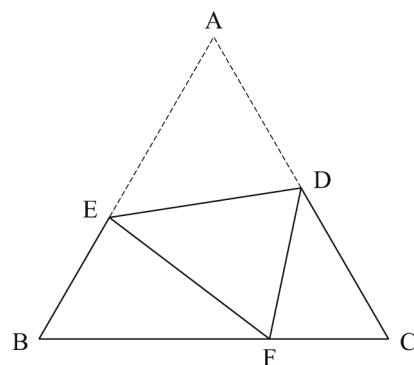


(2) 図 2 は、正三角形 ABC を、頂点 A が辺 BC 上にくるように折り曲げたとき、頂点 A が移る点を F とし、折り目の線分を ED としたものである。

このとき、 $\triangle EBF \sim \triangle FCD$ は、次のように証明することができる。

に証明の続きを書き、証明を完成させなさい。

図 2



〔証明〕

$\triangle EBF$ と $\triangle FCD$ について、

$\triangle ABC$ は正三角形で、正三角形の 1 つの内角は 60° だから、

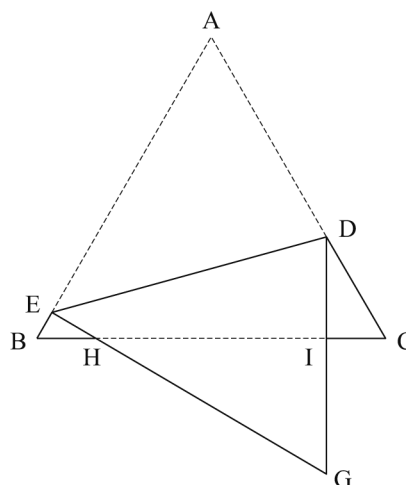
$$\angle EBF = \angle FCD = 60^\circ \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(3) 図 3 は、正三角形 ABC を、頂点 A が辺 BC より下側にくるように折り曲げたとき、頂点 A が移る点を G、折り目の線分を ED、BC と EG、DG の交点をそれぞれ H、I とし、 $DC = 2$ cm、 $\angle GIC = 90^\circ$ となるようにしたものである。

① $\angle EDG$ の大きさを求めなさい。

② GI の長さを求めなさい。

図 3



[解答欄]

(1)	$3\sqrt{3}$ (cm)	
(2)	△EBF と△FCD について、 △ABC は正三角形で、正三角形の 1 つの内角は 60° だから、 $\angle EBF = \angle FCD = 60^\circ$ ……① (例) 正三角形の頂点 A が辺 BC 上にくるように折り曲げたので、 $\angle EFD = 60^\circ$ ……② 三角形の 1 つの外角は、そのとなりにない 2 つの内角の和に等しいので、 $\angle FEB + \angle EBF = \angle EFD + \angle DFC$ ……③ ①, ②, ③から、 $\angle FEB + 60^\circ = 60^\circ + \angle DFC$ よって、 $\angle FEB = \angle DFC$ ……④ ①, ④から、2 組の角がそれぞれ等しいので、 $\triangle EBF \sim \triangle FCD$	
(3)	①	75 (°)
	②	$4 - \sqrt{3}$ cm

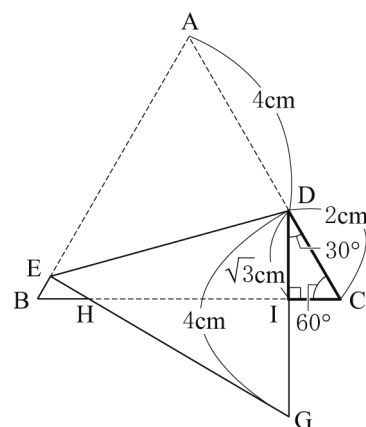
[解説]

(1) △BCD は、 $\angle BDC = 90^\circ$ 、 $\angle BCD = 60^\circ$ 、 $\angle CBD = 30^\circ$ の直角三角形だから、
 $BD = \sqrt{3}CD = 3\sqrt{3}(\text{cm})$

(3) ① $\angle DIC = 90^\circ$ 、 $\angle DCI = 60^\circ$ より、 $\angle CDI = 30^\circ$
 $\angle ADG = 180^\circ - \angle CDI = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$
 $\angle ADE = \angle EDG$ より、
 $\angle EDG = \frac{1}{2}\angle ADG = \frac{1}{2} \times 150^\circ = 75^\circ$

② 図 1 のように、△DIC は、 $\angle DIC = 90^\circ$ 、 $\angle DCI = 60^\circ$ 、
 $\angle CDI = 30^\circ$ の直角三角形だから、 $DC : DI = 2 : \sqrt{3}$
 $\Rightarrow 2 : DI = 2 : \sqrt{3} \Rightarrow DI = \sqrt{3}\text{cm}$
 $GD = AD = 6 - 2 = 4(\text{cm})$ だから、 $GI = GD - DI = 4 - \sqrt{3}(\text{cm})$

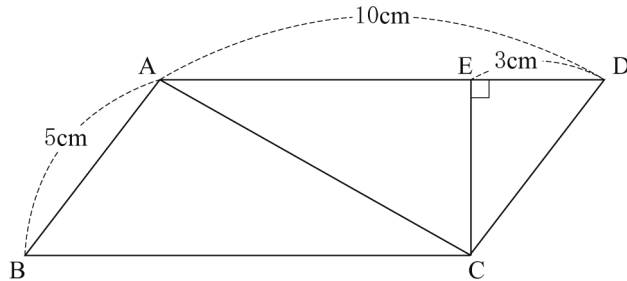
図 1



[問題 3] (鳥取 2022 年 2 月)

次の図 1 のように、 $AB=5\text{ cm}$ 、 $AD=10\text{ cm}$ 、 $\angle BAD$ が鈍角の平行四辺形 $ABCD$ がある。
 点 C から辺 AD にひいた垂線が辺 AD と交わる点を E とし、 $DE=3\text{ cm}$ である。
 このとき、あとの各問いに答えなさい。

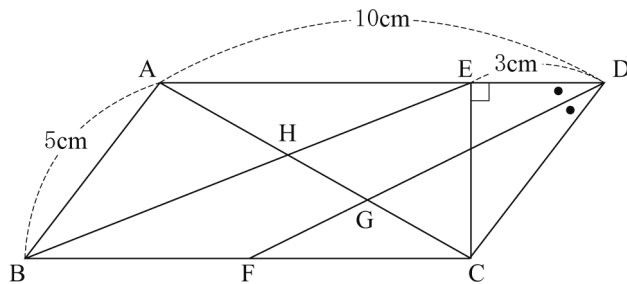
図 1



問 1 $\triangle ACE$ の面積を求めなさい。

問 2 次の図 2 のように、 $\angle ADC$ の二等分線が辺 BC 、線分 AC と交わる点をそれぞれ F 、 G とする。
 また、線分 AC と線分 BE の交点を H とする。
 このとき、あとの (1)～(3) に答えなさい。

図 2



- (1) $AH : HC$ を最も簡単な整数の比で答えなさい。
- (2) $\triangle CGF$ の面積を求めなさい。
- (3) $AH : HG : GC$ を最も簡単な整数の比で答えなさい。

[解答欄]

問 1	14 cm ²	
問 2	(1)	7 : 10
	(2)	$\frac{10}{3}$ cm ²
	(3)	21 : 13 : 17

[解説]

問 1 平行四辺形の対辺は等しいので、 $AB=DC=5\text{cm}$ 、 $\triangle ECD$ において、三平方の定理より、
 $EC^2=5^2-3^2=16$ $EC>0$ より、 $EC=4(\text{cm})$
 よって、 $\frac{1}{2} \times (10-3) \times 4 = 14(\text{cm}^2)$

問 2

(1) 平行四辺形の対辺は等しいので、 $AD=BC=10\text{cm}$
 $AE \parallel BC$ より、 $\triangle AEH$ と $\triangle CBH$ において、平行線と線分の比から、
 $AH : HC = AE : BC = 7 : 10$

(2) 仮定より、 $\angle ADF = \angle CDF$

$AD \parallel BC$ より、錯角は等しいから、 $\angle ADF = \angle CFD$

よって、 $\angle CDF = \angle CFD$ より、2つの角が等しいから、

$\triangle DFC$ は $DC=FC=5\text{cm}$ の二等辺三角形である。

$AD \parallel FC$ より、 $\triangle ADG$ と $\triangle CFG$ において、平行線と線分の比から、

$DG : GF = AD : FC = 10 : 5 = 2 : 1$

よって、 $\triangle CGF = \frac{1}{2+1} \triangle DFC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times FC \times EC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = \frac{10}{3}(\text{cm}^2)$

(3) $AD \parallel FC$ より、 $\triangle ADG$ と $\triangle CFG$ において、平行線と線分の比から、

$AG : GC = AD : FC = 10 : 5 = 2 : 1$

(1) より、 $AH : HC = 7 : 10$

$AG : GC$ と $AH : HC$ の比を合わせると、

$AG : GC = 2 : 1 = (2 \times 17) : (1 \times 17) = 34 : 17$

$AH : HC = 7 : 10 = (7 \times 3) : (10 \times 3) = 21 : 30$

よって、 $AH : HG : GC = AH : (AG - AH) : GC = 21 : (34 - 21) : 17 = 21 : 13 : 17$

[問題 4] (和歌山 2022 年 2 月)

図 1 のように、関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ …① のグラフ上に

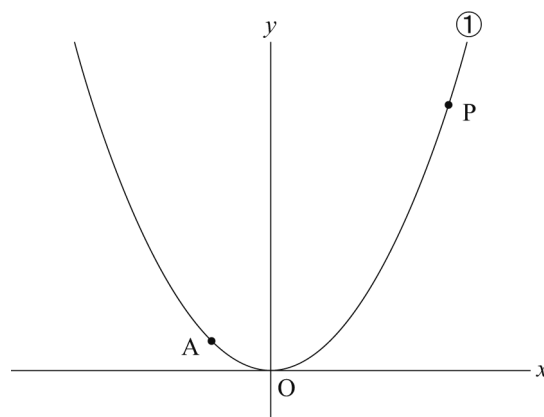
点 $A(-2, 1)$ がある。

また、点 P は、①のグラフ上の点である。

次の問 1 ～問 4 に答えなさい。

問 1 関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ について、 x の値が -2 から 0 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

図 1

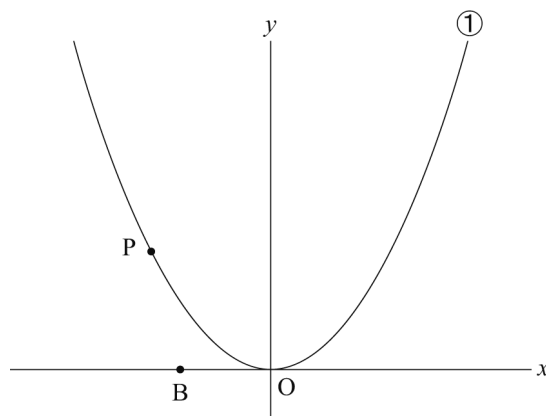


問 2 次の文中の(ア)、(イ)にあてはまる数を求めなさい。

関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ について、 x の変域が $-2 \leq x \leq (\text{ア})$ のとき、 y の変域は $(\text{イ}) \leq y \leq 9$ である。

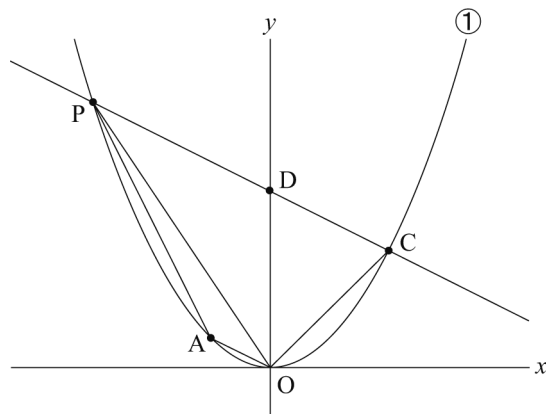
問 3 図 2 のように、 x 軸上に点 B をとる。
 P の x 座標が -4 のとき、 $\triangle OPB$ が二等辺三角形となるような B はいくつかある。
 そのうち、 x 座標が最も大きい B の座標と、 x 座標が最も小さい B の座標を、それぞれ求めなさい。

図 2



問 4 図 3 のように、①のグラフ上に点 $C(4, 4)$ があり、直線 PC と y 軸との交点を D とする。
 $\triangle OPD$ と $\triangle ODC$ の面積比が $3 : 2$ であるとき、 A を通り、四角形 $OAPC$ の面積を 2 等分する直線の式を求めなさい。

図 3



[解答欄]

問 1	$-\frac{1}{2}$	
問 2	(ア)	6
	(イ)	0
問 3	x 座標が最も大きい座標 B $(4\sqrt{2}, 0)$	
	x 座標が最も小さい座標 B $(-8, 0)$	
問 4	$y = \frac{5}{2}x + 6$	

[解説]

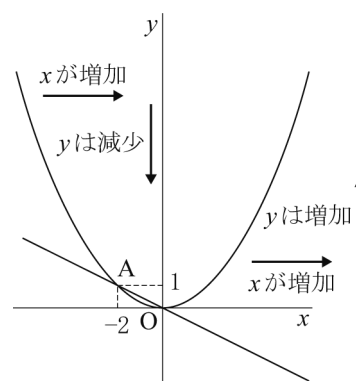
問 1 $x = -2$ のとき、関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ 上の点 A $(-2, 1)$ より $y = 1$

$x = 0$ のとき、 $y = \frac{1}{4}x^2$ に $x = 0$ を代入して、 $y = 0$

変化の割合 $= \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$ だから、

$$\frac{0-1}{0-(-2)} = -\frac{1}{2}$$

図 1

**ポイント** 変化の割合

変化の割合とは、 x の値が増加したときに、 y の値がどれだけ変化するかを割合で示したもの。

[公式] 変化の割合 $= \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$ で求めることができる。

また、グラフの形状によって、注意点が異なる。

・直線のグラフ(比例 $y = ax$ ，一次関数 $y = ax + b$)

→変化の割合は一定で、定数 a の値に等しい。

・曲線のグラフ(反比例 $y = \frac{a}{x}$ ，関数 $y = ax^2$)

→変化の割合は区間により変化するため、[公式]を利用して計算する必要がある。

※関数 $y = ax^2$ において、 x の値が p から q まで増加するときの変化の割合は、 $a(p+q)$ で求められる。

問 2 $x = -2$ のとき、 $y = 1$ であり、このとき、 x が増加して $x = 0$ になるまで y は減少する。

$x = 0$ のとき、 $y = 0$ であり、 $x > 0$ では x が増加すると y も増加する。

$y \leq 9$ だから、 $-2 \leq x$ の範囲で $y = 9$ となるのは、関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ に $y = 9$ を代入して、 $x^2 = 36$ 、

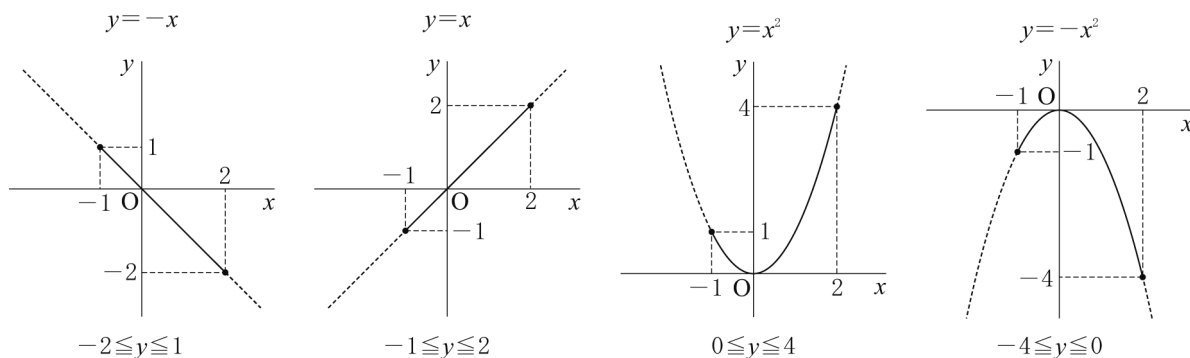
$-2 \leq x$ より $x = 6$ のときである。

したがって、 $-2 \leq x \leq 6$ よって、アは 6

図 1 のように $x = -2$ から x が増加するとき、 $x = 0$ になるまで y は減少し、このとき $y = 0$ になる。

さらに x が増加すると y も増加する。したがって、 $0 \leq y \leq 9$ よって、イは 0

ポイント 変域の問題はグラフで考えよう！



特に、関数 $y=ax^2$ の変域を求めるときに注意しよう。

問3 P の x 座標は -4 だから、 $x=-4$ を関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入して、 $P(-4, 4)$

$\triangle OPB$ は二等辺三角形だから、

図2のように $OP=PB$ のとき、

図3のように $PB=OB$ のとき、

図4・図5のように $OP=OB$ のときがある。

よって、この中で x 座標が最も大きいのは、明らかに図4のときであるから、

$OP=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$ より、 B の x 座標は $4\sqrt{2}$
よって、 $B(4\sqrt{2}, 0)$

図2

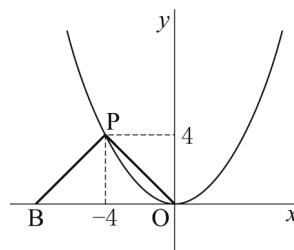


図3

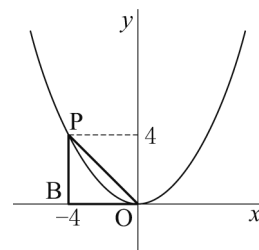


図4

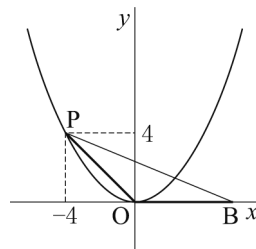
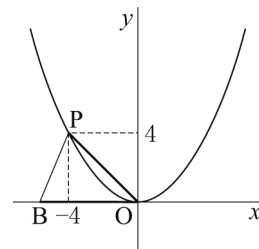


図5



問4 考え方の流れを整理する。

i) 点 P の座標を求める。

ii) 求める直線と直線 PC との交点を Q として、Q の条件を調べる。

iii) Q の条件より Q の座標を求め、直線の式を求める。

i) について

$\triangle ODP$ と $\triangle ODC$ において、2つの三角形の底辺をともに OD とすると、底辺が共通だから、

$\triangle ODP$ と $\triangle ODC$ の高さの比は $\triangle ODP$ と $\triangle ODC$ の面積の比と等しくなる。

$\triangle ODC$ の高さは C の x 座標だから 4

$\triangle ODP : \triangle ODC = (\triangle ODP \text{ の高さ}) : (\triangle ODC \text{ の高さ})$

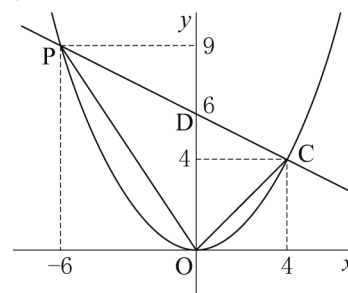
$= (\triangle ODP \text{ の高さ}) : 4 = 3 : 2$

$(\triangle ODP \text{ の高さ}) = 6$

図6のように P の x 座標は $x < 0$ であり、 $\triangle ODP$ の高さは 6 だから、P の x 座標は -6

$y=\frac{1}{4}x^2$ に $x=-6$ を代入して、 $y=9$ $P(-6, 9)$

図6



ii)について

$P(-6, 9)$ だから、直線 PC の傾きは、 $\frac{4-9}{4-(-6)} = -\frac{1}{2}$

$A(-2, 1)$ より直線 OA の傾きは $-\frac{1}{2}$ だから、

(直線 OA の傾き)=(直線 PC の傾き)

したがって、四角形 $OAPC$ は $OA \parallel PC$ の図 7 のような台形であり、この台形を図 8 のように分割し、 $\triangle OAC$ 、 $\triangle ACQ$ 、 $\triangle APQ$ の底辺をそれぞれ OA 、 CQ 、 PQ とすると、3 つの三角形の高さはすべて等しくなる。

このため、 $\triangle OAC$ 、 $\triangle ACQ$ 、 $\triangle APQ$ の面積の比はそれぞれの底辺の比と等しくなる。

四角形 $OAPC$ は直線 AQ により 2 等分されるので、

(四角形 $AOCQ$ の面積) : $\triangle APQ$

$= (\triangle OAC + \triangle ACQ) : \triangle APQ = (OA + CQ) : PQ = 1 : 1$

$A(-2, 1)$ だから、 $OA = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$C(4, 4)$ 、 $P(-6, 9)$ だから、 $CP = \sqrt{(-6-4)^2 + (9-4)^2} = 5\sqrt{5}$

$(OA + CQ) : PQ = (\sqrt{5} + CQ) : (5\sqrt{5} - CQ) = 1 : 1$

したがって、 $\sqrt{5} + CQ = 5\sqrt{5} - CQ$ $CQ = 2\sqrt{5}$

図 9 のように 3 点 $(-6, 9)$ 、 $(-6, 4)$ 、 $(4, 4)$ を頂点とする

斜辺が CP の直角三角形で考えると、

$CP : CQ = 5\sqrt{5} : 2\sqrt{5} = 5 : 2$ より、

Q の x 座標は C の x 座標より 4 小さいから、 $x = 4 - 4 = 0$ 、

Q の y 座標は C の y 座標より 2 大きいので、 $y = 4 + 2$ 、

よって、 $Q(0, 6)$

iii)について

直線 AQ は $A(-2, 1)$ 、 $Q(0, 6)$ を通るから、傾きは、 $\frac{6-1}{0-(-2)} = \frac{5}{2}$

直線 AQ は $y = \frac{5}{2}x + b$ と表され、 $Q(0, 6)$ を通るから、 $6 = \frac{5}{2} \times 0 + b$ $b = 6$

直線 AQ の式は $y = \frac{5}{2}x + 6$

図 7

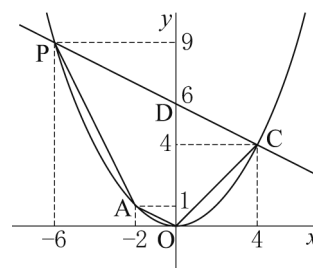


図 8

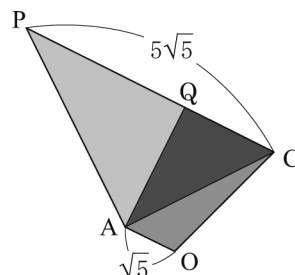


図 9

