

第 15 章	数学(3 年)	高校入試過去問題	空間図形	4213
			立体の体積	

[問題 1] (沖縄 2022 年 2 月)

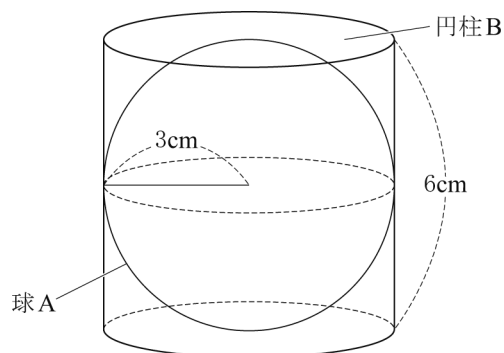
右の図は、半径 3 cm の球 A と、その球がちょうど入る円柱 B を表している。

このとき、次の各問いに答えなさい。

ただし、円周率は π とする。

(1) 球 A の表面積を求めなさい。

(2) 球 A の体積を求めなさい。



(3) 次のア～エのうちから、正しいものを 1 つ選び、記号で答えなさい。

ア 球 A の表面積は、円柱 B の底面積の 2 倍である。

イ 球 A の表面積は、円柱 B の側面積に等しい。

ウ 球 A の体積は、円柱 B の体積の $\frac{1}{3}$ 倍である。

エ 球 A の体積は、円柱 B の体積の半分である。

(4) 体積が球 A の体積と等しく、底面が円柱 B の底面と合同である円すいを円すい C とする。
円すい C の高さを求めなさい。

[解答欄]

(1)	$36\pi \text{ cm}^2$
(2)	$36\pi \text{ cm}^3$
(3)	イ
(4)	12 cm

[解説]

(1) $4 \times \pi \times 3^2 = 36\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

(2) $\frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = 36\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

(3) (円柱 B の底面積) $= 9\pi \text{ (cm}^2\text{)}$ (円柱 B の側面積) $= 6 \times 6\pi = 36\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

(円柱 B の体積) $= 54\pi \text{ (cm}^3\text{)}$ から、正しい選択肢を選ぶ。

(4) 円すい C の底面積は、円柱 B の底面積と等しく、 $9\pi \text{ (cm}^2\text{)}$ ここで、求める円すい C の高さを

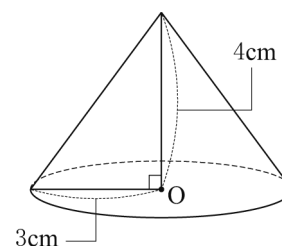
h とおくと、円すい C の体積について、 $36\pi = \frac{1}{3} \times 9\pi \times h$ から、 $h = 12 \text{ (cm)}$

[問題 2] (宮城 2022 年 2 月)

図 1 のような、半径が 3 cm の円 O を底面とし、高さが 4 cm の円錐^{すい}があります。
次の(1)、(2)の問いに答えなさい。ただし、円周率を π とします。

- (1) この円錐の体積を求めなさい。

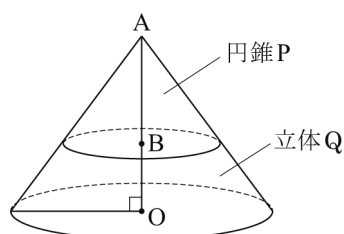
図 1



- (2) 図 2 は、図 1 において、円錐の頂点を A とし、線分 AO 上に、 $AB : BO = 3 : 2$ となる点 B をとったものです。

この円錐を、点 B をふくむ、底面に平行な平面で分けたときにできる 2 つの立体のうち、円錐の方を P 、もう一方の立体を Q とします。円錐 P と立体 Q の体積の比を求めなさい。

図 2



[解答欄]

(1)	12π $[\text{cm}^3]$
(2)	[円錐 P : 立体 Q =] $27 : 98$

[解説]

- (2) 円錐 P と、もとの円錐は、相似な立体であり、相似比が $AB : AO = 3 : 5$ であることから、体積の比は、 $3^3 : 5^3 = 27 : 125$ である。立体 Q は、もとの円錐から円錐 P を取り除いたものなので、円錐 P と立体 Q の体積の比は、 $27 : (125 - 27) = 27 : 98$

[問題 3] (三重 2022 年 2 月)

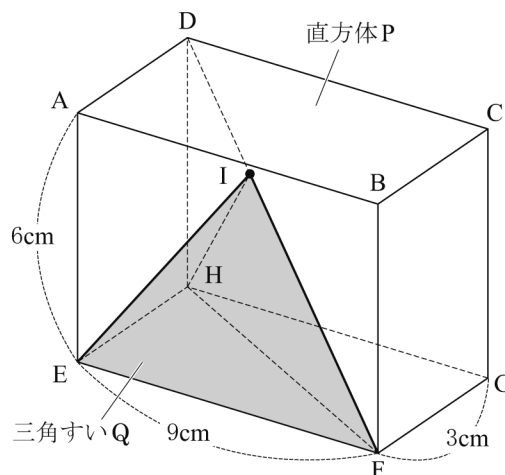
右の図のように、点 A, B, C, D, E, F, G, H を頂点とし、 $AE=6\text{ cm}$, $EF=9\text{ cm}$, $FG=3\text{ cm}$ の直方体 P がある。

直方体 P の対角線 DF 上に点 I をとり、4 点 E, F, H, I を結んで三角すい Q をつくる。

三角すい Q の体積が直方体 P の体積の $\frac{1}{9}$ のとき

次の各問いに答えなさい。

なお、各問いにおいて、答えの分母に $\sqrt{\quad}$ がふくまれるときは、分母を有理化しなさい。また、 $\sqrt{\quad}$ の中をできるだけ小さい自然数にしなさい。



- (1) $\triangle EFH$ を底面としたときの三角すい Q の高さを求めなさい。
- (2) 線分 EI の長さを求めなさい。

[解答欄]

(1)	4 cm
(2)	$\sqrt{29}$ cm

[解説]

- (1) 条件より、三角すい Q の体積は直方体 P の体積の $\frac{1}{9}$ 、直方体 P の体積は $3 \times 9 \times 6 = 162(\text{cm}^3)$

したがって、三角すい Q の体積は、 $\frac{1}{9} \times 162 = 18(\text{cm}^3)$

$$\triangle EFH = \frac{1}{2} \times 3 \times 9 = \frac{27}{2}(\text{cm}^2)$$

三角すい Q の底面を $\triangle EFH$ としたときの高さを h とすると、

$$\text{三角すい Q の体積は、} \frac{1}{3} \times \triangle EFH \times h = \frac{1}{3} \times \frac{27}{2} \times h = 18(\text{cm}^3)$$

$$\text{よって、} h = 3 \times \frac{2}{27} \times 18 = 4(\text{cm})$$

ポイント 図形問題を突破するには

- ① 問題文中から、条件となる情報をさがす！
- ② ①からわかることを発想として広げておく！
- ③ 問われていることを導き出すのに必要なものを逆算して、②の中から取捨選択する！
- ④ 前問からの発展の場合は、その結果を使う可能性大！
(条件が変わっている可能性もあるので要注意)

(2) 点IからFHに垂線IJをひくと、 $DH \parallel IJ$ で、

(1)より、 $IJ=4\text{cm}$

$\triangle FDH$ で平行線と線分の比より、

$$FI : ID = IJ : DH = 4 : 6 = 2 : 3$$

よって、 $FI : DI = 2 : 1$

図1のように、 $\triangle DEF$ は面CDEF上にあるので、
直線EIは辺DCと交わる。その交点をKとすると、

$DK \parallel EF$ より、 $EF : DK = FI : DI = 2 : 1$

$$\text{よって、} DK = \frac{1}{2}EF = \frac{9}{2}(\text{cm})$$

また、 $\triangle DAE$ で三平方の定理より、

$$DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}(\text{cm})$$

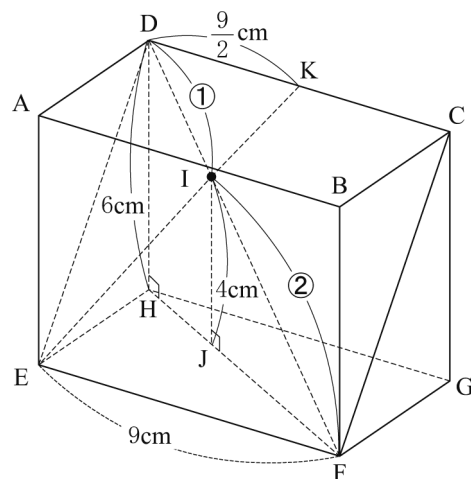
$\triangle DEK$ で三平方の定理より、

$$EK = \sqrt{DK^2 + DE^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + (3\sqrt{5})^2} = \frac{3\sqrt{29}}{2}(\text{cm})$$

$DK \parallel EF$ より、 $EI : KI = FI : DI = 2 : 1$ だから、

$$EI = \frac{2}{3}EK = \frac{2}{3} \times \frac{3\sqrt{29}}{2} = \sqrt{29}(\text{cm})$$

図1



[問題 4] (山口 2022 年 2 月)

図 2 は 1 辺の長さが 1 m である立方体である。この立方体を、ある 3 つの頂点を通る平面で切り取ると、立体 X と立体 Y ができる。図 3 は立体 X の投影図である。

立体 X の体積を V 、立体 Y の体積を V' としたとき、体積の比 $V : V'$ を、次のア～エから 1 つ選び、記号で答えなさい。

- ア $V : V' = 1 : 1$
 イ $V : V' = 3 : 1$
 ウ $V : V' = 5 : 1$
 エ $V : V' = 7 : 1$

図 2

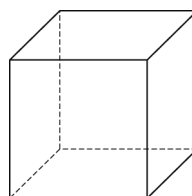
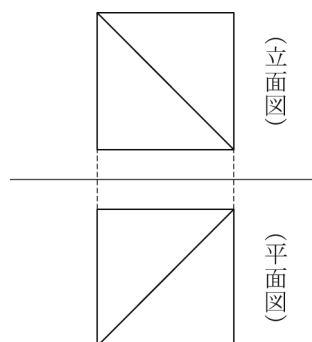


図 3



[解答欄]

ウ

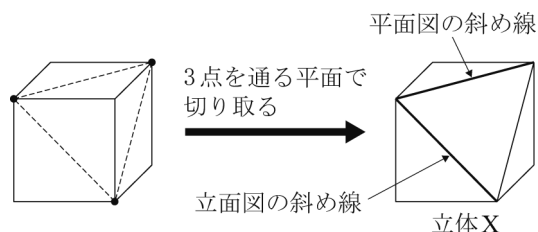
[解説]

立面図と平面図の切れ込みから右のように切ったと考えられる。

また、このうち、右図に残った大きい方の体積が V 、切り取った体積が V' となる。ここで V' は三角すいであり、その体積は

$$V' = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \right) \times 1 = \frac{1}{6} (\text{m}^3)$$

また、 $V = (\text{一辺 } 1\text{m の立方体の体積}) - V' = 1 \times 1 \times 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} (\text{m}^3)$ よって、 $V : V' = \frac{5}{6} : \frac{1}{6} = 5 : 1$



[問題 5] (大分 2022 年 2 月)

右の図 1 のように、三角柱 $ABC-DEF$ があり、
 $AB=4\text{ cm}$, $BC=6\text{ cm}$, $BE=5\text{ cm}$, $\angle BAC=90^\circ$ である。

辺 BE 上に、線分 AP と線分 PF の長さの和 $AP+PF$ が
 もっとも短くなるように点 P をとる。

次の問(1)～問(3)に答えなさい。

- (1) 辺 AC の長さを求めなさい。
 (2) 線分 AP の長さを求めなさい。

(3) 右の図 2 のように、三角錐 $ADPC$ と三角錐 $ADPF$
 について考える。

$\triangle AFP$ の面積を求めなさい。

図 1

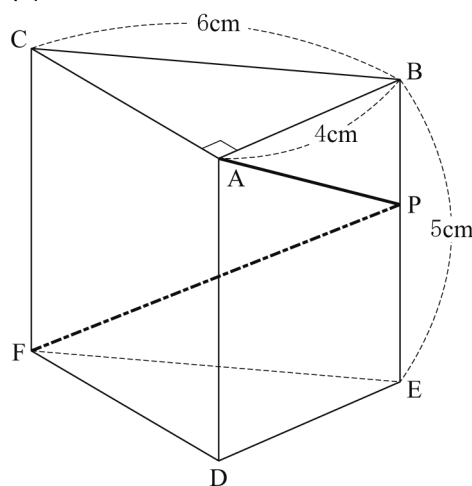
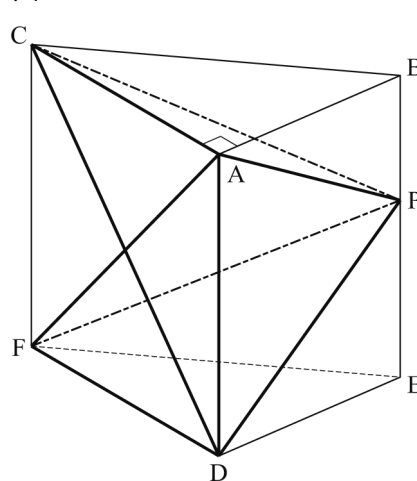


図 2



[解答欄]

(1)	$2\sqrt{5}$ (cm)
(2)	$2\sqrt{5}$ (cm)
(3)	$10\sqrt{2}$ (cm ²)

【解説】

- (1) $\triangle ABC$ で三平方の定理を用いると、 $BC^2=AB^2+AC^2$
 $36=16+AC^2$ $AC>0$ より、 $AC=2\sqrt{5}$ cm

- (2) 展開図の一部をかいて考える(図1)。

この平面上での AF と BE の交点が点 P である。

$\triangle AFC$ で三平方の定理を用いて、 $AF^2=AC^2+CF^2=125$

$AF>0$ より、 $AF=5\sqrt{5}$ cm

ここで、 $\triangle AFC \sim \triangle APB$ なので、

$AF:AP=AC:AB$ $5\sqrt{5}:AP=10:4$ $AP=2\sqrt{5}$ cm

- (3) 図1より、 $FP=AF-AP=5\sqrt{5}-2\sqrt{5}=3\sqrt{5}$ (cm)である。

また、三角柱の面 $ACFD$ 内において、 $\triangle ACF$ で三平方の定理を用いると、

$AF^2=AC^2+CF^2=20+25=45$ $AF>0$ より、

$AF=3\sqrt{5}$ cm よって、 $FP=AF$ となるので、

$\triangle AFP$ は二等辺三角形となる(図2)。

AP の中点を M として、 $\triangle AFM$ で三平方の定理を用いて、

$AF^2=FM^2+MA^2$ から、

$FM^2=40$ $FM>0$ より、 $FM=2\sqrt{10}$ cm

よって、 $\triangle AFP=\frac{1}{2} \times AP \times FM=10\sqrt{2}$ (cm²)

図1

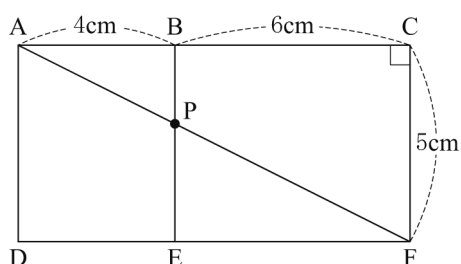


図2

