

第 15 章	数学(3 年)	高校入試過去問題	空間図形	4231
			三平方の定理	

[問題 1] (岩手 2022 年 2 月)

下の図 1 は、底面が直角三角形で、側面がすべて長方形の三角柱です。EF=6 cm, $DF=2\sqrt{5}$ cm, BE=9 cm で、点 M, N はそれぞれ辺 EF, DF の中点です。

図 2 は、図 1 の立体を 4 点 A, B, M, N をふくむ平面で切ったときの頂点 D, E をふくむ方の立体です。このとき、次の問 1, 問 2 に答えなさい。

問 1 線分 BM の長さを求めなさい。

問 2 図 2 の立体の体積を求めなさい。

図 1

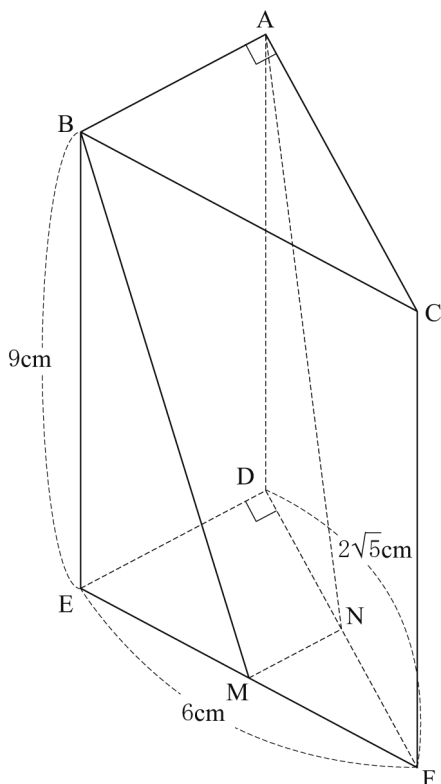
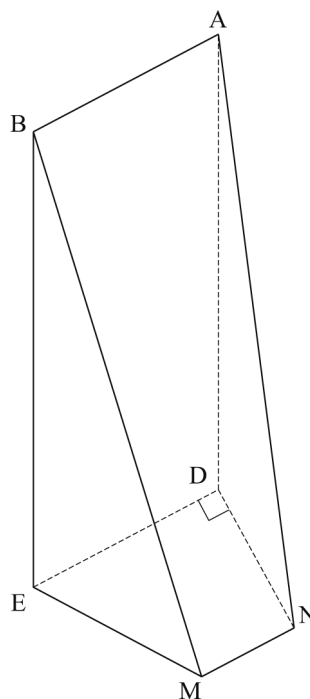


図 2



[解答欄]

問 1	$3\sqrt{10} \text{ cm}$
問 2	$15\sqrt{5} \text{ cm}^3$

[解説]

問 1 $\triangle BEM$ で、三平方の定理より、 $BM = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}(\text{cm})$

問 2 右の図のように、点 B と D、B と N をそれぞれ結ぶと、

求める立体の体積は、四角錐 B-DEMN の体積と

三角錐 B-ADN の体積の和である。

$\triangle DEF$ において、三平方の定理より、

$$DE = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{5})^2} = 4(\text{cm})$$

$$\text{中点連結定理より、} MN = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2} \times 4 = 2(\text{cm})$$

四角形 DEMN は台形なので、その面積は、

$$\frac{1}{2} \times (2 + 4) \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}(\text{cm}^2)$$

よって、四角錐 B-DEMN の体積は、

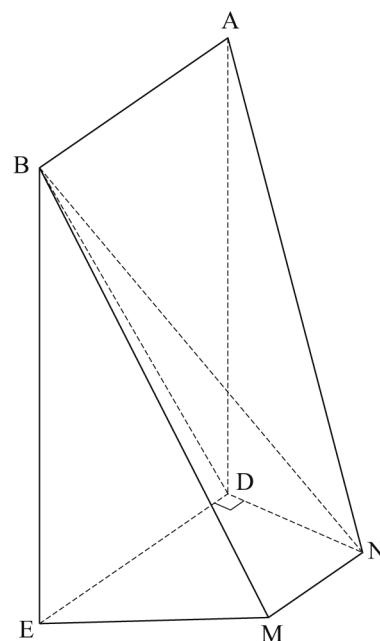
$$\frac{1}{3} \times 3\sqrt{5} \times 9 = 9\sqrt{5}(\text{cm}^3)$$

また、 $\angle ADE = \angle EDN = 90^\circ$ より、面 ADN と辺 AB は垂直

だから、三角錐 B-ADN の体積は、

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times 9 \right) \times 4 = 6\sqrt{5}(\text{cm}^3)$$

したがって、 $9\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 15\sqrt{5}(\text{cm}^3)$



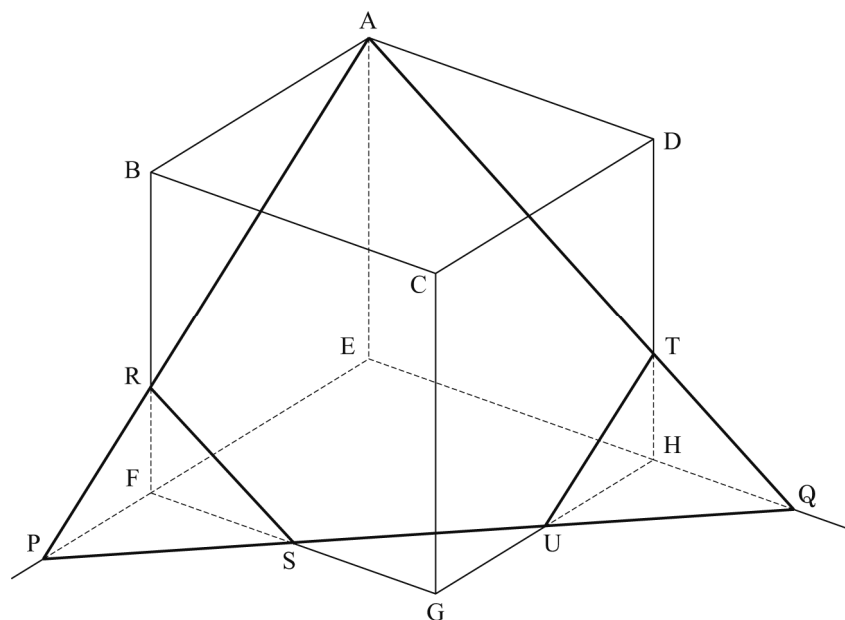
[問題 2] (山梨 2022 年 2 月)

下の図の一边の長さが 6 cm である立方体 $ABCD-EFGH$ において、点 P は $EP=9\text{ cm}$ となる半直線 EF 上の点であり、点 Q は $EQ=9\text{ cm}$ となる半直線 EH 上の点である。

また、点 R は線分 AP , BF の交点であり、点 T は線分 AQ , DH の交点である。

さらに、点 S は線分 PQ , FG の交点であり、点 U は線分 PQ , GH の交点である。

このとき、次の問 1～問 4 に答えなさい。



問 1 線分 PQ の長さを求めなさい。

問 2 三角錐 $AEPQ$ の体積と三角錐 $RFPS$ の体積をそれぞれ求めなさい。

問 3 五角形 $ARSUT$ の面積を求めなさい。

問 4 4 点 A , C , R , T を頂点とする立体の体積を求めなさい。

[解答欄]

問 1	$9\sqrt{2}\text{ cm}$
問 2	三角錐 $AEPQ$ 81 cm^3
	三角錐 $RFPS$ 3 cm^3
問 3	$\frac{21\sqrt{17}}{2}\text{ cm}^2$
問 4	48 cm^3

[解説]

問 1 図 1 のように $\triangle EPQ$ について考える。

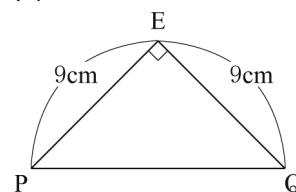
$\angle PEQ = 90^\circ$ だから、 $\triangle EPQ$ は直角三角形である。

三平方の定理より、 $PQ^2 = EP^2 + EQ^2$

$EP = EQ = 9(\text{cm})$ だから、 $PQ^2 = 9^2 + 9^2 = 162$

$PQ > 0$ より、 $PQ = 9\sqrt{2}(\text{cm})$

図 1



問 2 図 2 のように三角錐 AEPQ について考える。

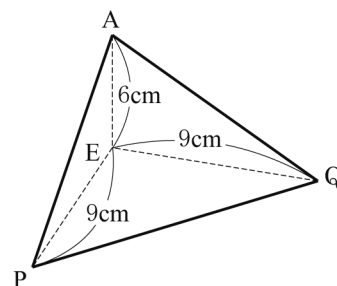
三角錐 AEPQ の底面を $\triangle EPQ$ とすると高さは AE である。

$$\triangle EPQ = \frac{1}{2} \times EP \times EQ = \frac{1}{2} \times 9 \times 9 = \frac{81}{2}(\text{cm}^2)$$

$$(\text{三角錐 AEPQ の体積}) = \frac{1}{3} \times \triangle EPQ \times AE$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{81}{2} \times 6 = 81(\text{cm}^3)$$

図 2



平面 AEQ // 平面 RFS だから、三角錐 AEPQ と三角錐 RFPS は相似である。

図 3 より、 $PE : PF = 9 : 3 = 3 : 1$

したがって、三角錐 AEPQ と三角錐 RFPS の相似比は

$3 : 1$ だから、体積比は $3^3 : 1^3 = 27 : 1$ である。

(三角錐 AEPQ の体積) $= 81(\text{cm}^3)$ だから、

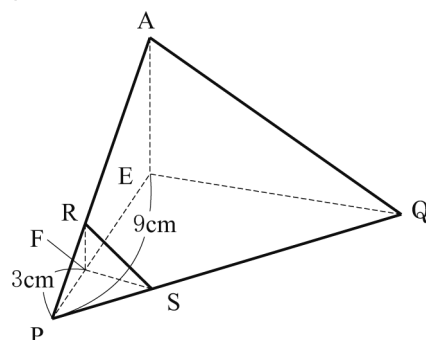
(三角錐 AEPQ の体積) : (三角錐 RFPS の体積)

$= 81 : (\text{三角錐 RFPS の体積}) = 27 : 1$

これを解いて、

$$(\text{三角錐 RFPS の体積}) = \frac{1}{27} \times 81 = 3(\text{cm}^3)$$

図 3



問 3 五角形 ARSUT を三角形の組み合わせにして面積を求める。

図 4 より、(五角形 ARSUT の面積) $= \triangle APQ - \triangle RPS - \triangle TUQ$

(i) $\triangle APQ$ の面積を求める。

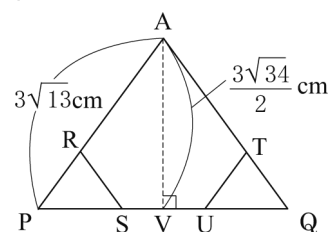
$\triangle AEP$ は $\angle AEP = 90^\circ$ 、 $AE = 6(\text{cm})$ 、 $EP = 9(\text{cm})$ の直角三角形だから、三平方の定理より、 $AP^2 = AE^2 + EP^2 = 36 + 81 = 117$ $AP > 0$ より、 $AP = 3\sqrt{13}(\text{cm})$

$\triangle AEQ$ についても同様に、 $AQ = 3\sqrt{13}(\text{cm})$

したがって、 $\triangle APQ$ は $AP = AQ$ の二等辺三角形である。

頂点 A から辺 PQ に垂線をひき、辺 PQ との交点を V とすると、二等辺三角形の性質より、 $\angle AVP = \angle AVQ = 90^\circ$ 、 $PV = QV$ である。

図 4



問 1 より $PQ=9\sqrt{2}(\text{cm})$ だから, $PV=QV=\frac{9\sqrt{2}}{2}(\text{cm})$

$\triangle APV$ は $\angle AVP=90^\circ$ の直角三角形だから, 三平方の定理より,

$$AV^2=AP^2-PV^2=117-\frac{81}{2}=\frac{153}{2} \quad AV>0 \text{ より, } AV=\frac{3\sqrt{34}}{2}(\text{cm})$$

$$\text{したがって, } \triangle APQ=\frac{1}{2}\times PQ\times AV=\frac{1}{2}\times 9\sqrt{2}\times \frac{3\sqrt{34}}{2}=\frac{27\sqrt{17}}{2}(\text{cm}^2)\cdots\textcircled{1}$$

(ii) $\triangle RPS\sim\triangle APQ$ であることを示して, $\triangle RPS$ と $\triangle TUQ$ の面

積を求める。

図 5 より, $\triangle PFR$ と $\triangle PEA$ において, $RF\parallel AE$ だから,

$$\triangle PFR\sim\triangle PEA$$

相似比は $PF:PE=1:3$ だから, $PR:PA=PF:PE=1:3\cdots$

②

同様に, $\triangle QHT$ と $\triangle QEA$ において,

図 6 より, $\triangle PFS$ と $\triangle PEQ$ において, $FS\parallel EQ$ だから,

$$\triangle PFS\sim\triangle PEQ$$

相似比は, $PS:PQ=PF:PE=1:3\cdots\textcircled{4}$

同様に, $\triangle QHU$ と $\triangle QEP$ において, $HU\parallel EP$ だから,

$$\triangle QHU\sim\triangle QEP$$

相似比は, $QU:QP=QH:QE=1:3\cdots\textcircled{5}$

図 4 の $\triangle RPS$ と $\triangle APQ$ において, 共通の角だから, $\angle RPS=\angle$

$\angle APQ$

②, ④より, $PR:PA=PS:PQ=1:3$

よって, 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから,

$$\triangle RPS\sim\triangle APQ \text{ であり, 相似比は } 1:3 \text{ だから面積比は, } 1^2:3^2=1:9 \quad \triangle RPS=\frac{1}{9}\triangle APQ$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{5} \text{ より, 同様に, } \triangle TUQ\sim\triangle APQ \text{ で, 面積比は, } 1^2:3^2=1:9 \quad \triangle TUQ=\frac{1}{9}\triangle APQ$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } \triangle APQ=\frac{27\sqrt{17}}{2}(\text{cm}^2) \text{ だから,}$$

$$(\text{五角形 ARSUT の面積})=\triangle APQ-\triangle RPS-\triangle TUQ=\triangle APQ-\frac{1}{9}\triangle APQ-\frac{1}{9}\triangle APQ$$

$$=\frac{7}{9}\triangle APQ=\frac{7}{9}\times\frac{27\sqrt{17}}{2}=\frac{21\sqrt{17}}{2}(\text{cm}^2)$$

参考

$\triangle RPS\sim\triangle APQ$ について, 問 2 と同様に平面 $AEQ\parallel$ 平面 RFS であり,

$PE:PF=9:3=3:1$ だから, $\triangle RPS\sim\triangle APQ$ の相似比は $3:1$ と考えることもできる。

図 5

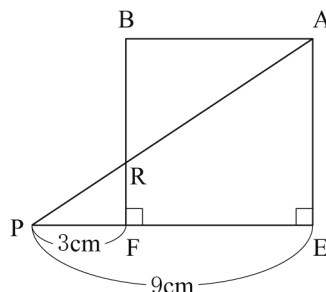
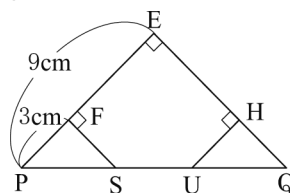


図 6



問4 点 R, T をふくみ, 平面 EFGH と平行な面と辺

AE, CG との交点をそれぞれ M, N とすると, 求める体積は, 図 7 のような直方体 ABCD-MRNT の内部にある四面体 ACRT である。

四面体 ACRT の体積は, 直方体 ABCD-MRNT の体積から, 4 個の三角錐 ABCR, ACDT, ARMT, CRNT の体積をひいたものである。

AE : RF = PE : PF = 3 : 1, AE = 6(cm) だから,

$$RF = \frac{1}{3} \times 6 = 2(\text{cm})$$

BR = BF - RF = 6 - 2 = 4(cm) となるから,

$$(\text{直方体 ABCD-MRNT の体積}) = AB \times BC \times BR = 6 \times 6 \times 4 = 144(\text{cm}^3)$$

$$\text{三角錐 ABCR の体積は底面を } \triangle ABC \text{ とすると, } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times AB \times BC = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18(\text{cm}^2)$$

三角錐 ABCR の高さは BR = 4(cm)

$$(\text{三角錐 ABCR の体積}) = \frac{1}{3} \times \triangle ABC \times BR = \frac{1}{3} \times 18 \times 4 = 24(\text{cm}^3)$$

他の三角錐 ACDT, ARMT, CRNT も同様にして, 体積は全て 24(cm³)

したがって, (四面体 ACRT の体積) = (直方体 ABCD-MRNT の体積) - 4 × (三角錐の体積)

$$= 144 - 4 \times 24 = 48(\text{cm}^3)$$

別解

求める体積の立体は, 図 8 のような直方体の内部にある四面体 ACRT である。

対角線 AC と対角線 BD の交点を M として, 四面体 ACRT を図 9 のように, 平面 BRTD で 2 個の三角錐 ARMT と CRMT に分割する。

平面 BRTD による四面体 ACRT の断面図は図 10 のようになる。

図 7

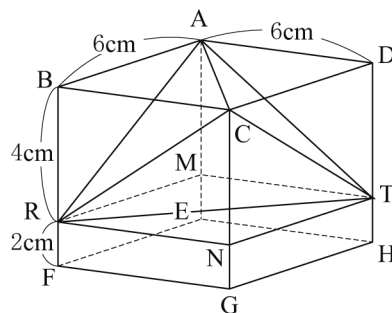


図 8

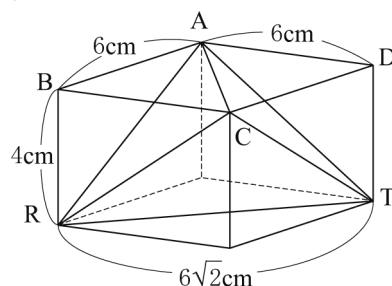


図 9

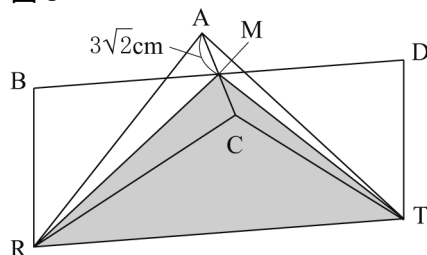
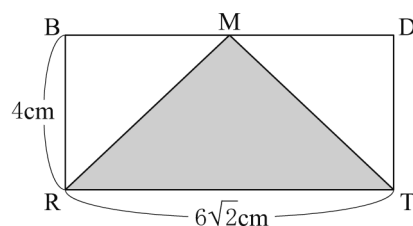


図 10



三角錐 ARMT の底面を $\triangle MRT$ とすると, RT は 1 辺を 6cm とする正方形の対角線の長さになるから,

RT = $6\sqrt{2}(\text{cm})$, $\triangle MRT$ の高さは BR と等しく, AE : RF = PE : PF = 3 : 1, AE = 6(cm) だから,

$$RF = \frac{1}{3} \times 6 = 2(\text{cm})$$

$$BR = BF - RF = 6 - 2 = 4(\text{cm})$$

$$\text{したがって, } \triangle MRT = \frac{1}{2} \times RT \times BR = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 4 = 12\sqrt{2}(\text{cm}^2)$$

底面を $\triangle MRT$ としたときの三角錐 $ARMT$ の高さは AM で、 $AC=RT$ だから、

$$AM = \frac{1}{2} \times RT = 3\sqrt{2}(\text{cm})$$

$$(\text{三角錐 } ARMT \text{ の体積}) = \frac{1}{3} \times \triangle MRT \times AM = \frac{1}{3} \times 12\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 24(\text{cm}^3)$$

三角錐 $CRMT$ の体積も同様にして

$$(\text{三角錐 } CRMT \text{ の体積}) = \frac{1}{3} \times \triangle MRT \times CM = \frac{1}{3} \times 12\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 24(\text{cm}^3)$$

よって求める体積は、

$$(\text{三角錐 } ARMT \text{ の体積}) + (\text{三角錐 } CRMT \text{ の体積}) = 24 + 24 = 48(\text{cm}^3)$$

[問題 3] (新潟 2022 年 2 月)

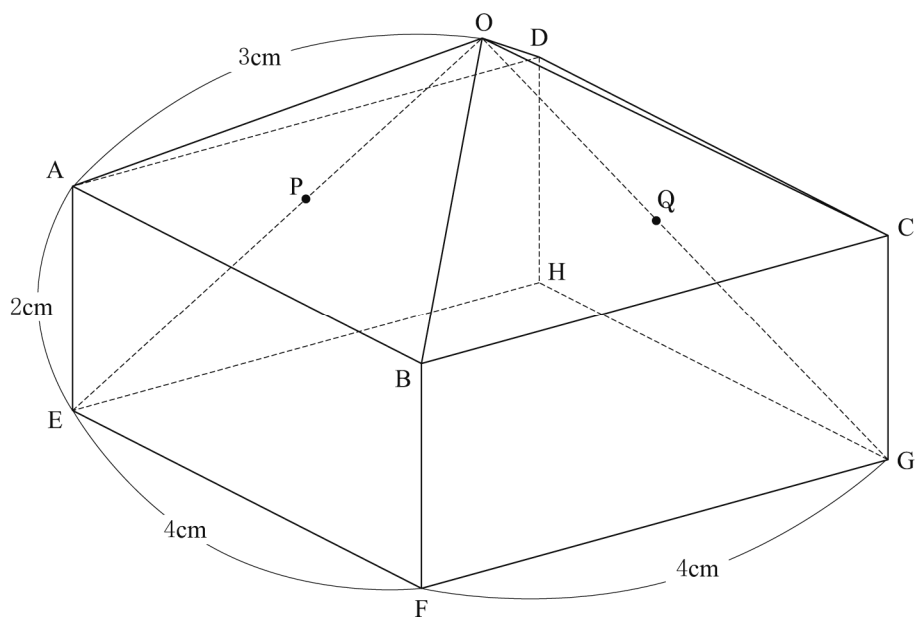
下の図のような、正四角すいと直方体を合わせてできた立体がある。

正四角すい $OABCD$ は、1 辺の長さが 4 cm の正方形を底面とし、 $OA=OB=OC=OD=3\text{ cm}$ であり、

直方体 $ABCD-EFGH$ の辺 AE の長さは 2 cm である。

また、直線 OE , OG と平面 $ABCD$ との交点を、それぞれ P , Q とする。

このとき、次の問 1～問 3 に答えなさい。



問 1 正四角すい $OABCD$ の高さを答えなさい。

問 2 線分 PQ の長さを求めなさい。

問 3 $\triangle PFQ$ の面積を求めなさい。

[解答欄]

問 1	1 cm
問 2	[求め方] (正答例) 線分 PQ, EG の中点をそれぞれ M, N とおく。 PQ // EG, OM=1 cm, MN=2 cm であるから, PQ : EG=1 : 3 また, EG=4$\sqrt{2}$cm よって, PQ=$\frac{4\sqrt{2}}{3}$cm 答 <u>$\frac{4\sqrt{2}}{3}$ cm</u>
問 3	[求め方] (正答例) △FPQ は FP=FQ の二等辺三角形で, PQ を底辺とすると高さは MF である。 △MNF において, MF²=MN²+NF²=12 MF=2$\sqrt{3}$ cm よって, △PFQ の面積は $\frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{2}}{3} \times 2\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ cm² 答 <u>$\frac{4\sqrt{6}}{3}$ cm²</u>

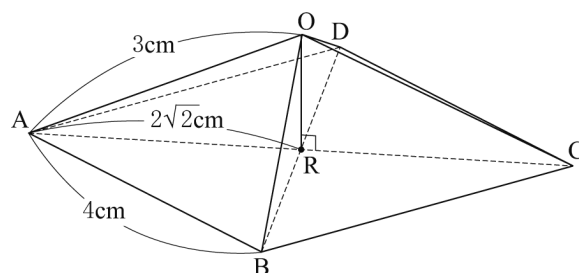
[解説]

問 1 点 O から正方形 ABCD に垂線 OR をひくと, 点 R は正方形 ABCD の対角線の交点になる(*1)。

△ABC が直角二等辺三角形であることに注目すると, AC=4 $\sqrt{2}$ cm で, AR= $\frac{1}{2}$ AC=2 $\sqrt{2}$ (cm)

よって, △AOR で三平方の定理を用いて, OR²=3²-(2 $\sqrt{2}$)²=1 OR>0 より, OR=1cm

図 1



*1：（補足）点 O からひいた垂線 OR が正方形の対角線を通ることの説明

$\triangle OAR$ と $\triangle OBR$ について、

仮定より、 $OA=OB$ …①

共通な辺なので、 $OR=OR$ …②

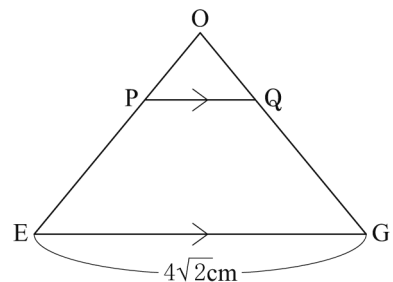
OR は正方形 ABCD への垂線なので、 $\angle ORA=\angle ORB=90^\circ$ …③

①，②，③より，直角三角形の斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいことから， $\triangle OAR \equiv \triangle OBR$

また， $\triangle OCR$ と $\triangle ODR$ についても同じことがいえるので， $\triangle OAR \equiv \triangle OBR \equiv \triangle OCR \equiv \triangle ODR$ である。よって，合同な図形の対応する線分の長さは等しく， $AR=BR=CR=DR$ である。つまり，点 R は正方形 ABCD の 4 つの頂点 A，B，C，D から等しい距離にあるので，頂点 O からひいた垂線 OR は正方形の対角線の交点を通る。

問 2 図 2 に示すような平行線と相似な三角形に気付きたい。

図 2



ポイント 図形問題を突破するには

- ① 問題文中から，条件となる情報をさがす！
- ② ①からわかることを発想として広げておく！
- ③ 問われていることを導き出すのに必要なものを逆算して，②の中から取捨選択する！
- ④ 前問からの発展の場合は，その結果を使う可能性大！（条件が変わっている可能性もあるので要注意）

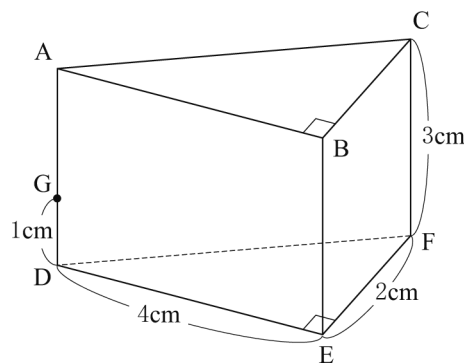
[問題 4] (栃木 2022 年 2 月)

右の図は、 $DE=4\text{ cm}$ 、 $EF=2\text{ cm}$ 、 $\angle DEF=90^\circ$ の直角三角形 DEF を底面とする高さが 3 cm の三角柱 $ABC-DEF$ である。また、辺 AD 上に $DG=1\text{ cm}$ となる点 G をとる。

このとき、次の (1)、(2) の問いに答えなさい。

(1) BG の長さを求めなさい。

(2) 三角柱 $ABC-DEF$ を 3 点 B , C , G を含む平面で 2 つの立体に分けた。この 2 つの立体のうち、頂点 D を含む立体の体積を求めなさい。



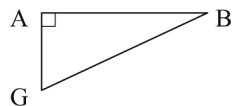
[解答欄]

(1)	$2\sqrt{5}\text{ (cm)}$
(2)	$\frac{28}{3}\text{ (cm}^3\text{)}$

[解説]

(1) 直角三角形の斜辺 BG の長さを求める。

$$AG=3-1=2(\text{cm}), AB=4\text{cm} \text{ だから, } BG=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}(\text{cm})$$



(2) 三角柱 $ABC-DEF$ の体積から三角錐 $G-ABC$ の体積をひく。

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times 3 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times 2 = 12 - \frac{8}{3} = \frac{28}{3}(\text{cm}^3)$$

[問題 5] (福島 2022 年 2 月)

下の図のような、底面が $DE=EF=6\text{ cm}$ の直角二等辺三角形で、高さが 9 cm の三角柱がある。

辺 AC の中点を M とする。

このとき、次の問 1, 問 2 に答えなさい。

問 1 線分 BM の長さを求めなさい。

問 2 辺 BE 上に、 $\triangle APC$ の面積が 30 cm^2 となるように点 P をとる。

(1) 線分 PM の長さを求めなさい。

(2) 3 点 A, C, P を通る平面と点 B との距離を求めなさい。

